Занятие 4.3 Метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений.

Системы второго порядка

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

Решение этой системы находят по формулам:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{2}$$

Примеры

1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$$

В этом случае $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $b_1 = -4$, $b_2 = -5$. Подставим эти числа в формулы (2):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4-5}{1-(-2)} = -3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-5-(-8)}{1-(-2)} = 1$$

Ответ: $x = -3$, $y = 1$.

2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 2y = 11 \\ 4x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

В этом случае $a_{11} = \sqrt{3}$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -\sqrt{3}$, $b_1 = 11$, $b_2 = 0$. Подставим эти числа в формулы (2):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 4 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}} = \frac{-11\sqrt{3}}{-3-8} = \sqrt{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 11 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 4 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}} = \frac{0-44}{-3-8} = 4$$

Ответ: $x = \sqrt{3}$, $y = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите систему уравнений:

1. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - \sqrt{5}y = 0 \\ 2\sqrt{5}x - 5y = -10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 40u + 3v = -10 \\ 20u - 7v = -5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5z + 2t = 1 \\ 15z + 3t = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3a + 2b = \dfrac{1}{2} \\ 2a + 5b = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$

Системы третьего порядка

Рассмотрим систему линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{3}$$

Решение этой системы находят по формулам:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{4}$$

Пример

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \\ 7x + 8y = 2 \end{cases}$$

В этом случае $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 5,\ a_{23} = 6,\ a_{31} = 7,\ a_{32} = 8,\ a_{33} = 0,\ b_1 = 5,\ b_2 = 8,\ b_3 = 2$. Подставим эти числа в формулы (4):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (32 - 35) - 6 \cdot (8 - 14) = -9 + 36 = 27$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (64 - 10) - 6 \cdot (40 - 4) = 162 - 216 = -54$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (8 - 56) - 6 \cdot (2 - 35) = -144 + 198 = 54$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (10 - 64) - 2 \cdot (8 - 56) + 5 \cdot (32 - 35) = -54 + 96 - 15 = 27$$

$$x = \frac{-54}{27} = -2, \quad y = \frac{54}{27} = 2, \quad z = \frac{27}{27} = 1$$

Ответ: $x = -2,\ y = 2,\ z = 1.$

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ -x - y + 5z = -18 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 6y + 4z = 6 \\ 3x + 10y + 8z = 21 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 4x + 5y + 6z = 19 \\ 7x + 8y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 6x + 5y + 4z = -2 \\ 9x + 8y + 7z = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y + z = -8 \\ 2x + 3y + z = -3 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$