Занятие 4.2 Алгебраические уравнения степени выше второй.

Существует 2 основных метода решения алгебраических уравнений степени выше второй:

- метод разложения на множители;
- метод замены переменной.

`Метод замены переменной`

Напомним формулы, по которым вычисляются дискриминант и корни квадратного уравнения:

$$
\begin{gathered}
ax^2 + bx + c = 0 \\
D = b^2 - 4ac \\
x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}
\end{gathered} \tag{1}
$$

Примеры

1. Решим уравнение $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.
   Сделаем замену $x^2 = y$. Получим:
   $$y^2 - 3y + 2 = 0$$
   $$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 2$$
   $$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$
   $$y_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 2, \quad y_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 1$$
   Обратная замена: $y \to x^2$:
   $$x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}; \qquad x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$
   Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 1$.
2. Решим уравнение $(2 - x)^6 + 9(2 - x)^3 + 8 = 0$.

Сделаем замену $(2-x)^3 = y$. Получим:

$$y^2 + 9y + 8 = 0$$
$$a = 1,\quad b = 9,\quad c = 8$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 49$$

$$y_1 = \frac{-9+\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = -1, \qquad y_2 = \frac{-9-\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = -8$$

Обратная замена: $y \to (2-x)^3$:

$$(2-x)^3 = -1 \iff 2 - x = -1 \iff x = 3; \qquad (2-x)^3 = -8 \iff 2 - x = -2 \iff x = 4$$

Ответ: $x = 3,\ x = 4$.

3. Решим уравнение $2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + x + \dfrac{1}{x} - 10 = 0$.

Сделаем замену $x + \dfrac{1}{x} = y$. Получим:

$$2y^2 + y - 10 = 0$$
$$a = 2,\quad b = 1,\quad c = -10$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = 2, \qquad y_2 = \frac{-1-\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{2}$$

Обратная замена: $y \to x + \dfrac{1}{x}$:

$$\textbf{1)}\ \ x + \frac{1}{x} = 2 \iff x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \iff \Big[\text{приведем к общему знаменателю}\Big] \iff \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff \Big[\text{используем формулу } a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2\Big] \iff$$

$$\iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

$$\textbf{2)}\ \ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \iff x + \frac{1}{x} + \frac{5}{2} = 0 \iff \Big[\text{приведем к общему знаменателю}\Big] \iff \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x} = 0$$

$$\frac{2x^2 + 5x + 2}{2x} = 0 \iff 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9; \qquad x_1 = \frac{-5+\sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-5-\sqrt{9}}{4} = -2$$

Ответ: $x = 1,\ x = -\dfrac{1}{2},\ x = -2$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $x^4 - 9x^2 - 10 = 0$
2. $x^4 - 7x^2 + 3 = 0$
3. $x^4 - 12,3x^2 + 45 = 0$
4. $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$
5. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
6. $(2 - x - x^2)^6 - 14,7(2 - x - x^2)^3 + 57 = 0$
7. $2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + x - \dfrac{1}{x} - 2 = 0$

Метод разложения на множители

Примеры

1. Решим уравнение $3x^3 - 8x^2 + 14x = 0$.
   Вынесем за скобки общий множитель:
   $$x(3x^2 - 8x + 14) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ или } 3x^2 - 8x + 14 = 0$$
   $$3x^2 - 8x + 14 = 0; \quad D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 14 = 64 - 168 = -108$$
   $$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{-108}}{2 \cdot 3} = \frac{8 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{108}}{6} = \frac{8 + i \cdot 6\sqrt{3}}{6}, \quad x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{-108}}{6} = \frac{8 - i \cdot 6\sqrt{3}}{6}$$
   Ответ: $x = 0,\ x = \dfrac{8 \pm i \cdot 6\sqrt{3}}{6}$.

2. Решим уравнение $x^3 + 2x^2 - 7x - 12 = 0\ \ (*)$.
   Попробуем найти один корень этого уравнения методом подбора. Следует искать корень среди делителей свободного члена, т.е. числа -12. Делителями числа -12 являются числа $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12$.
   - Подставим в уравнение $(*)$ $x = 1 \Rightarrow 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow -16 = 0$ – неверно.
   - Подставим в уравнение $(*)$ $x = -1 \Rightarrow (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 12 = 0 \Leftrightarrow -4 = 0$ – неверно.
   - Подставим в уравнение $(*)$ $x = 2 \Rightarrow 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 12 = 0 \Leftrightarrow -10 = 0$ – неверно.
   - Подставим в уравнение $(*)$ $x = -2 \Rightarrow (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) - 12 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ – неверно.
   - Подставим в уравнение $(*)$ $x = -3 \Rightarrow (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - 7 \cdot (-3) - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ – верно $\Rightarrow\ x = -3$ – корень уравнения $(*)$.

   Разделим $x^3 + 2x^2 - 7x - 12$ на $x - (-3)$:
   $$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 7x - 12 \\ x^3 + 3x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x + 3 \\ \hline x^2 - x - 4 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} -x^2 - 7x \\ -x^2 - 3x \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{r} -4x - 12 \\ -4x - 12 \end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Следовательно, $x^3 + 2x^2 - 7x - 12 = (x+3)(x^2 - x - 4)$.

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 12 = 0 \iff (x+3)(x^2 - x - 4) = 0 \iff x + 3 = 0 \ \text{ или } \ x^2 - x - 4 = 0$$

$$x + 3 = 0 \iff x = -3$$

$$x^2 - x - 4 = 0; \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 17; \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \ \ x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $x = -3, \ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, \ \ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$
2. $x^4 - 11x^3 - x^2 = 0$
3. $(2x-3)^3 - (2x-3)^2 = 12x - 18$
4. $x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = 0$
5. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
6. $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$
7. $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 24x - 24 = 0$