Занятие 4.1 Комплексные числа: определение, формы записи. Использование комплексных чисел при решении квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Определение

Комплексное число – это выражение вида $a + b \cdot i$, в котором a и b – любые вещественные числа, i – символ, обладающий таким свойством: $i^2 = -1$.

- Число a называют действительной частью комплексного числа $a + b \cdot i$ и пишут $\mathrm{Re}(a + b \cdot i) = a$ (Re – сокращение от слова real, т.е. "действительный").
- Число b называют мнимой частью комплексного числа $a + b \cdot i$ и пишут $\mathrm{Im}(a + b \cdot i) = b$ (Im – сокращение от слова imaginary, т.е. "мнимый").

Примеры

$z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = \sqrt{3} - \dfrac{i}{2},\ z_3 = 3 + i \cdot \ln 5,\ z_4 = \sqrt{10}i,\ z_5 = i$

Арифметические операции над комплексными числами

Пусть $\boxed{z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i}$ – два любые комплексных числа.

1. **Сложение**:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \tag{1}$$

2. **Вычитание**:

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i} \tag{2}$$

3. **Умножение**:

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = \left[i^2 = -1\right] = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

$$\boxed{z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} \tag{3}$$

4. **Деление**:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\left[\begin{array}{c}\text{умножим числитель и знаменатель на}\\ \text{комплексное число } a_2-b_2i\end{array}\right]=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=$$
$$=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+b_1a_2i-b_1b_2i^2}{a_2^2-\cancel{a_2b_2i}+\cancel{b_2a_2i}-b_2^2i^2}=\left[i^2=-1\right]=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a^2+b^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a^2+b^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a^2+b^2}i$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a^2+b^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a^2+b^2}i} \tag{4}$$

Примеры

1. Сложить комплексные числа $z_1=-5+7i,\ z_2=5-i$. Воспользуемся формулой (1):

$$z_1+z_2=(-5+5)+(7-1)i=6i$$

2. Вычесть из комплексного числа $z_1=3-11i$ комплексное число $z_2=4+15i$. Воспользуемся формулой (2):

$$z_1-z_2=(3-4)+(-11-15)i=-1-26i$$

3. Умножить комплексное число $z_1=-5+i$ на комплексное число $z_2=1-4i$:

$$z_1\cdot z_2=(-5+i)\cdot(1-4i)=-5\cdot1+(-5)\cdot(-4i)+i\cdot1+i\cdot(-4i)=-5+20i+i-4i^2=$$
$$=\left[i^2=-1\right]=-5+21i+4=1+21i$$

4. Разделить комплексное число $z_1=1+2i$ на комплексное число $z_2=3-7i$:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{3-7i}=\left[\begin{array}{c}\text{умножим числитель и знаменатель на}\\ \text{комплексное число } 3+7i\end{array}\right]=\frac{(1+2i)(3+7i)}{(3-7i)(3+7i)}=$$
$$=\frac{3+7i+6i+14i^2}{3^2-(7i)^2}=\left[i^2=-1\right]=\frac{3+13i-14}{9+49}=\frac{-11+13i}{58}=-\frac{11}{58}+\frac{13}{58}i$$

5. Упростить выражение $(6x^3+yi)(-6x^3+yi)$:

$$(6x^3+yi)(-6x^3+yi)=(yi+6x^3)(yi-6x^3)=\left[\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой}\\ \text{сокращенного умножения}\\ (a-b)(a+b)=a^2-b^2\end{array}\right]=$$
$$(yi)^2-(6x^3)^2=y^2i^2-36x^6=\left[i^2=-1\right]=-y^2-36x^6$$

6. Разложить на множители x^2+1:

$$x^2+1=x^2-(-1)=\left[-1=i^2\right]=x^2-i^2=(x-i)(x+i)$$

7. Разложить на множители $25x^2+9y^2$:

$$25x^2+9y^2=25x^2-(-1\cdot9y^2)=\left[-1=i^2\right]=25x^2-(i^2\cdot9y^2)=(5x)^2-(i\cdot3y)^2=(5x-i\cdot3y)(5x+i\cdot3y)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Сложите комплексные числа z_1 и z_2:
   (a) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 13 - 23i$
   (b) $z_1 = 0,7 - 2,5i,\ z_2 = 1,5 - 1,2i$
   (c) $z_1 = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}i,\ z_2 = -\sqrt{3} + 3\sqrt{2}i$
2. Вычтите из комплексного числа z_1 комплексное число z_2.
   (a) $z_1 = 3 - i,\ z_2 = 1,4 + 2,3i$
   (b) $z_1 = 7 + 3,5i,\ z_2 = -1,9 + 2,23i$
   (c) $z_1 = -\sqrt{5} + \sqrt{3}i,\ z_2 = \sqrt{5} + 6\sqrt{3}i$
3. Умножьте комплексное число z_1 на комплексное число z_2:
   (a) $z_1 = -i,\ z_2 = 4 + \sqrt{10}i$
   (b) $z_1 = -1 - 0,5i,\ z_2 = 0,3 + 2i$
   (c) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i,\ z_2 = 2 - 2i$
4. Разделите комплексное число z_1 на комплексное число z_2:
   (a) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i$ (b) $z_1 = -\sqrt{2} + 2i,\ z_2 = i$ (c) $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 5 - 3i$
5. Упростите выражение:
   (a) $(x + i)(x - i)$ (b) $(3x - yi)^2$ (c) $(\sqrt{3}y + \sqrt{2}xi)^2$
6. Разложите на множители:
   (a) $x^2 + y^2$ (b) $256x^4 + 81y^4$ (c) $x^8 + 256y^8$

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

$$\boxed{\text{Если } a < 0 \text{ то } \sqrt{a} = \pm\sqrt{|a|} \cdot i}$$

Примеры

$$\sqrt{-36} = \pm\sqrt{36}i = \pm 6i,\ \sqrt{-1,44} = \pm\sqrt{1,44}i = \pm 1,2i,\ \sqrt{-\frac{1}{16}} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}}i = \pm\frac{i}{4},\ \sqrt{-1} = \pm\sqrt{1}i = \pm i$$

Напомним, как находятся корни квадратного уравнения:

Уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Корни уравнения: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a}, \ \ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a}$

Примеры

1. $x^2 + 256 = 0 \iff x^2 = -256 \iff x = \sqrt{-256} \iff x = \pm\sqrt{256}i \iff x_1 = 16i, \ x_2 = -16i$
2. $x^2 - 2x + 2 = 0$
   $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$
   $x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{4}i}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 + 2i}{2} = \dfrac{2(1+i)}{2} = 1 + i, \quad x_2 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{4}i}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 - 2i}{2} = \dfrac{2(1-i)}{2} = 1 - i$
3. $x^2 + 3x + 8,5 = 0$
   $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8,5 = 9 - 34 = -25$
   $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{25}i}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3 + 5i}{2}, \quad x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{25}i}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3 - 5i}{2}$

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $x^2 + 196 = 0$
2. $x^2 + 81 = 0$
3. $x^2 + 4x + 5 = 0$
4. $x^2 - x + 2,5 = 0$
5. $x^2 - 6x + 25 = 0$
6. $x^2 + 10x + 61 = 0$
7. $x^2 - 5x + 6,5 = 0$
8. $x^2 + 11x + 36,5 = 0$
9. $x^2 - 5x + 2 = 0$
10. $x^2 + 3x + 6,25 = 0$
11. $x^2 + 3x + 3 = 0$
12. $x^2 + 6,25 = 0$