Занятие 2.3

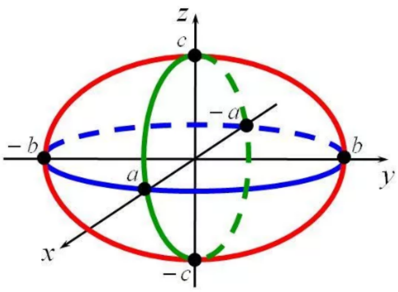
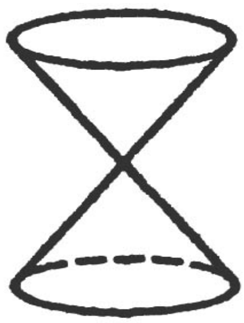
Метод параллельных сечений при исследовании формы поверхности второго порядка

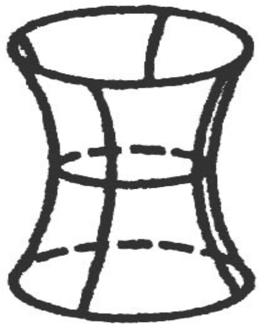
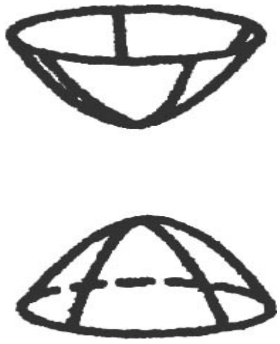
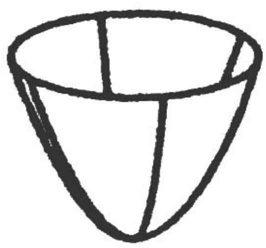
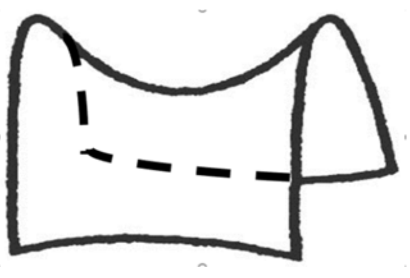
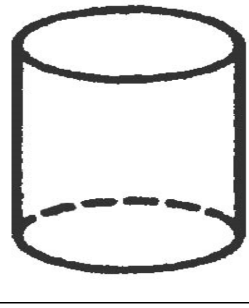
Определение. **Поверхностью второго порядка** называется множество точек трехмерного пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени от трех переменных

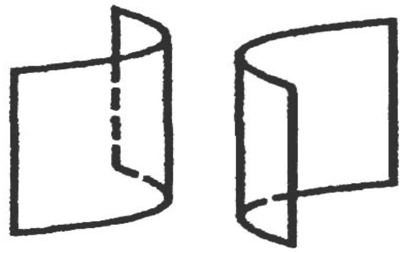
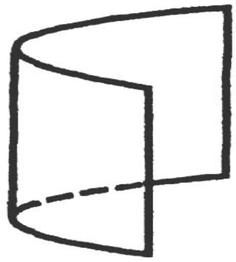
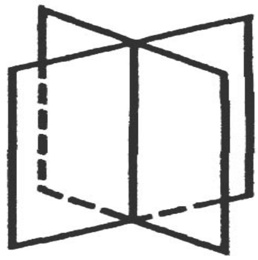
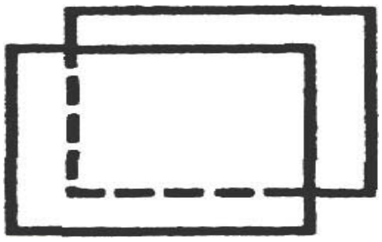
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = 0,$$

называемым **общим уравнением поверхности второго порядка**. Коэффициенты этого уравнения – действительные числа, по крайней мере одно из чисел A, B, C, D, E, F отлично от нуля.

Основные типы поверхностей второго порядка и их канонические уравнения (вертикальная ось – ось Oz)

Каноническое уравнение	Схематическое изображение	Название поверхности
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$		Эллипсоид
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$		Конус второго порядка

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$		Однополостный гиперболоид
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$		Двуполостный гиперболоид
$z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$		Эллиптический параболоид
$z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}$		Гиперболический параболоид
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$		Эллиптический цилиндр

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Гиперболический цилиндр
$y^2=2px$		Параболический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		Пара пересекающихся плоскостей
$\frac{x^2}{a^2}=1$		Пара параллельных плоскостей
$x^2=0$		Пара совпадающих плоскостей

Определение. **Сечение пространственной фигуры** – это плоская фигура, которая образуется при пересечении пространственной фигуры плоскостью, и граница которой лежит на поверхности пространственной фигуры.

Суть **метода параллельных сечений** заключается в том, чтобы, используя уравнение поверхности второго порядка, получить уравнения линий второго порядка, расположенные в плоскостях, параллельных координатным. Для этого поверхность рассекают множеством плоскостей, параллельных координатным, в каждой из которых должна получиться линия второго порядка.

Примеры решения задач

Задача 1. Изобразить поверхность $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}+z^2=0$, используя метод параллельных сечений.

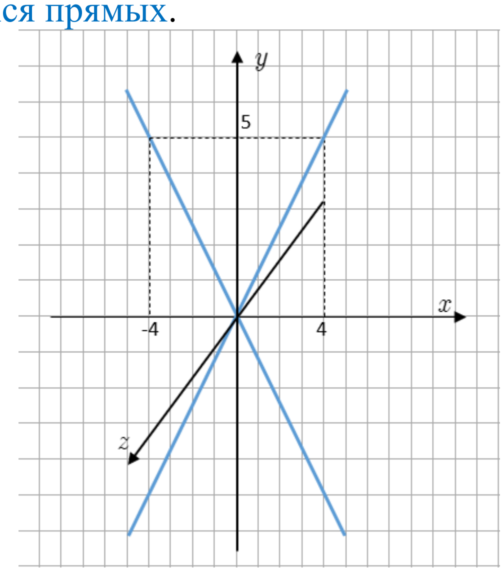
<u>*Решение*</u>. Из уравнения поверхности видно, что это конус с осью Oy. Поэтому при изображении системы координат направим ось Oy вверх. Вправо направим ось Ox, а направление оставшейся оси Oz выберем так, чтобы система координат была правой.

1. Построим сечение конуса плоскостью $z=0$ (плоскостью xOy). Это сечение задается системой:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}+z^2=0,\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=0,\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}\right)\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}\right)=0,\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=0,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=0,\end{array}\right.\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{5}{4}x,\\ y=-\dfrac{5}{4}x,\end{array}\right.\\ z=0.\end{cases}$$

Следовательно, в результате сечения конуса плоскостью xOy получаем пару пересекающихся прямых.

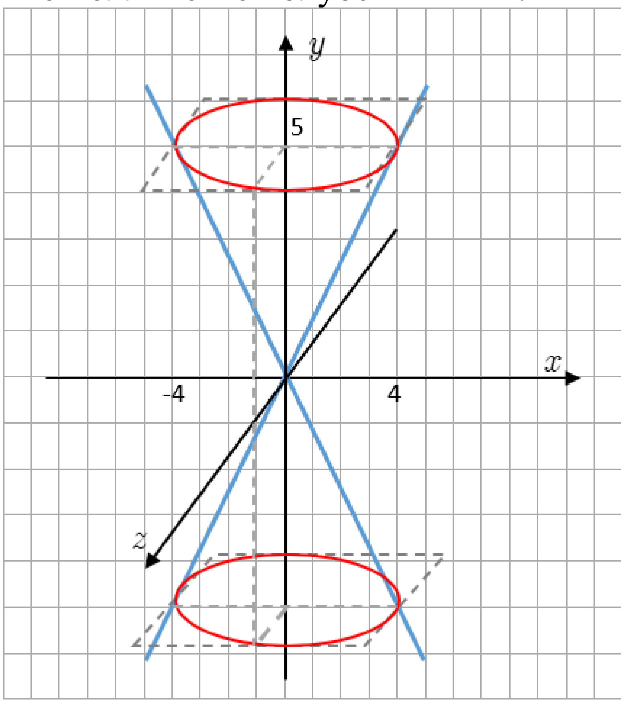


2. Проведем сечения плоскостями $y = 5$ и $y = -5$, параллельными плоскости xOz. Тогда получим уравнения сечений:

$$\text{а) } \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} + z^2 = 0, \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{1} = 1, \\ y = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} + z^2 = 0, \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{1} = 1, \\ y = -5. \end{cases}$$

Эти сечения являются эллипсами. Нарисуем сначала их основные прямоугольники (на чертеже они будут выглядеть параллелограммами), а затем в них впишем эллипсы с полуосями 4 и 1.

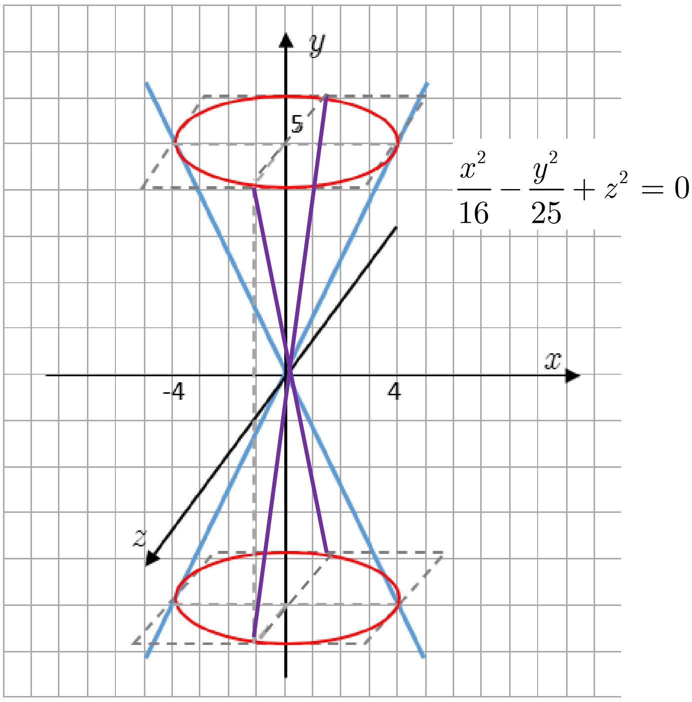


3. Построим сечение конуса плоскостью $x = 0$ (плоскостью yOz). Это сечение задается системой:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} + z^2 = 0, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{25} + z^2 = 0, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(z - \dfrac{y}{5}\right)\left(z + \dfrac{y}{5}\right) = 0, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} z-\dfrac{y}{5}=0, \\ z+\dfrac{y}{5}=0, \end{array}\right. \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{y}{5}, \\ z=-\dfrac{y}{5}, \end{array}\right. \\ x=0. \end{cases}$$

В результате сечения конуса плоскостью yOz получаем пару пересекающихся прямых.



В совокупности построенные сечения дают представление о данной поверхности, являющейся конусом второго порядка.

Задача 2. Изобразить поверхность $\dfrac{x^2}{4}+y^2=z$, используя метод параллельных сечений.

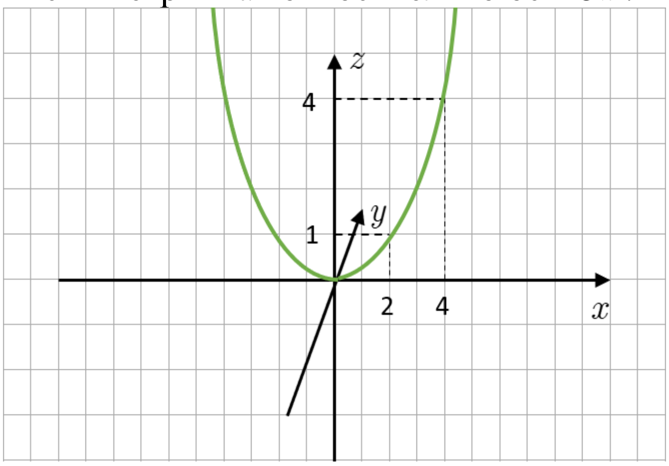
<u>*Решение*</u>. Данная поверхность является эллиптическим параболоидом с осью Oz. Поэтому при изображении системы координат целесообразно направить ось Oz вверх. Вправо направим ось Ox, а направление оставшейся оси Oy выберем так, чтобы система координат была правой.

1. Построим сечение параболоида плоскостью $y=0$ (плоскостью xOz).

   Это сечение задается системой:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=z,\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{4}=z,\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=4z,\\ y=0.\end{cases}$$

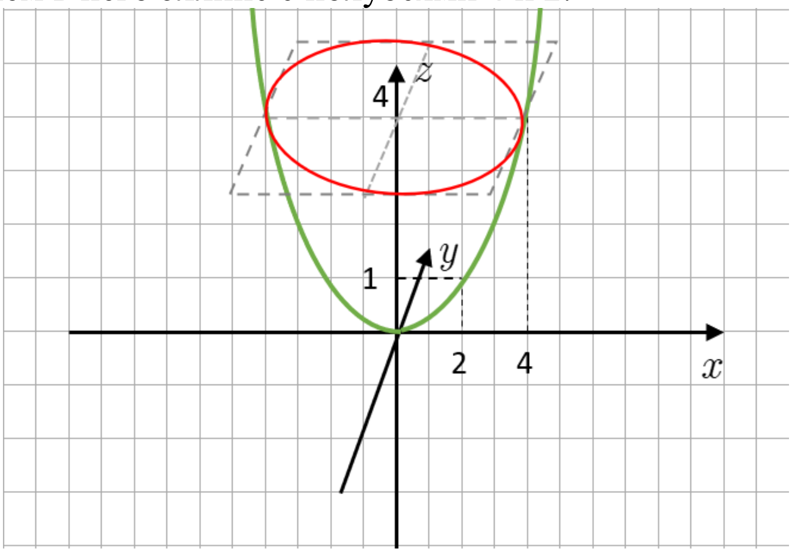
Следовательно, сечением параболоида является парабола, лежащая в плоскости xOz и симметричная относительно оси Oz. Изобразим ее.



2. Проведем сечение плоскостью $z=4$, параллельной плоскости xOy. Тогда получим уравнение сечения:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=z,\\ z=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=4,\\ z=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ z=4.\end{cases}$$

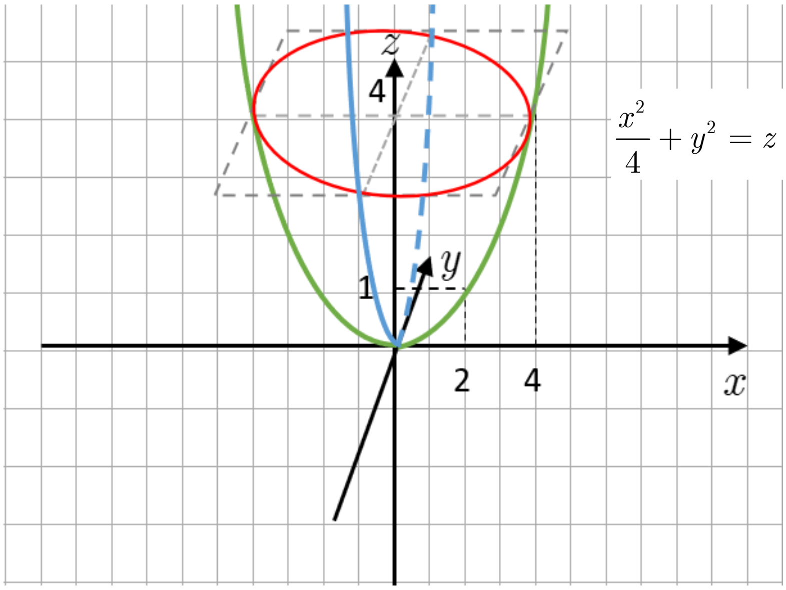
Этим сечением является эллипс. Нарисуем сначала основной прямоугольник (на чертеже он будет выглядеть параллелограммом), а затем впишем в него эллипс с полуосями 4 и 2.



3. Проведем сечение плоскостью $x=0$ (плоскостью yOz). Получим уравнение сечения:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=z, \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=z, \\ x=0. \end{cases}$$

Сечением является парабола, расположенная в плоскости yOz, симметричная относительно оси Oz.



Задача 3. Изобразить поверхность $x^2=4z$, используя метод параллельных сечений.

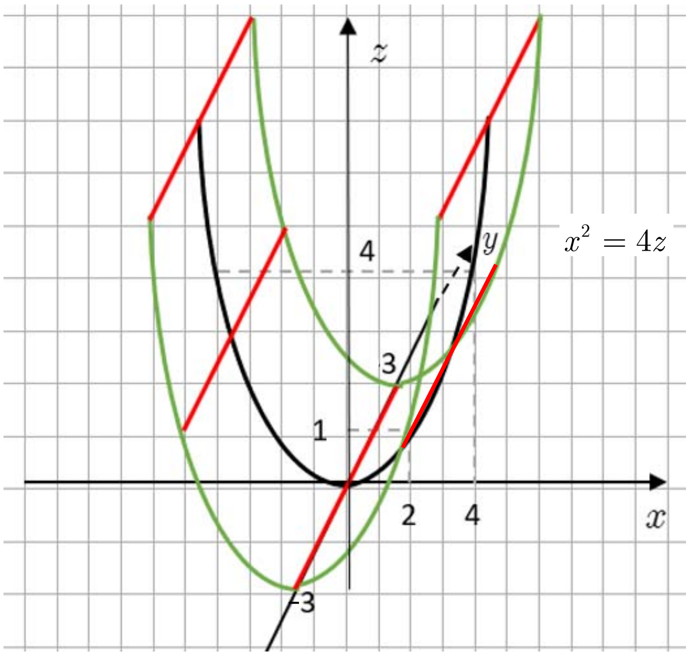
Решение. В уравнении поверхности отсутствует переменная y, поэтому данное уравнение описывает цилиндр (параболический), образующая которого параллельна оси Oy.

Наиболее простое изображение цилиндра получается тогда, когда ось, параллельная образующей, направлена «на нас» или «от нас». Поэтому направим ось Oy «от нас» (чтобы система координат была правой), Oz – вверх, а Ox – вправо.

Пересечем данную поверхность плоскостью xOz, уравнение которой $y=0$, и плоскостями, параллельными ей: $y=3$ и $y=-3$. В этих плоскостях будут лежать параболы:

$$\begin{cases} x^2=4z, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} x^2=4z, \\ y=3; \end{cases} \begin{cases} x^2=4z, \\ y=-3. \end{cases}$$

Изобразим их. После этого соединим некоторые соответственные точки прямыми, параллельными оси Oy.



Задачи для самостоятельного решения:

Методом параллельных сечений исследуйте форму поверхности и постройте ее:

1) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$;
2) $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$;
3) $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$;
4) $2y^2 + z^2 = 2x$;
5) $2x^2 + 4z^2 = 4$;
6) $y^2 - 6z = 0$.