Занятие 2.2

Окружность, сфера: их канонические уравнения, построение

1 Окружность, ее каноническое уравнение

Определение. **Окружностью** называется плоская кривая, состоящая из множества всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой **центром,** на некоторое расстояние R, называемое **радиусом**.

Определение. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Центр, радиус и диаметр окружности являются также центром, радиусом и диаметром круга.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда по определению окружности для любой точки $M(x, y)$, принадлежащей ей, выполняется равенство $M_0M = |\overrightarrow{M_0M}| = R$.

Воспользуемся формулой вычисления длины вектора:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R.$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2}. \qquad (1)$$

Определение. Уравнение (1) называется **каноническим уравнением окружности** с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом R (рис. 1).

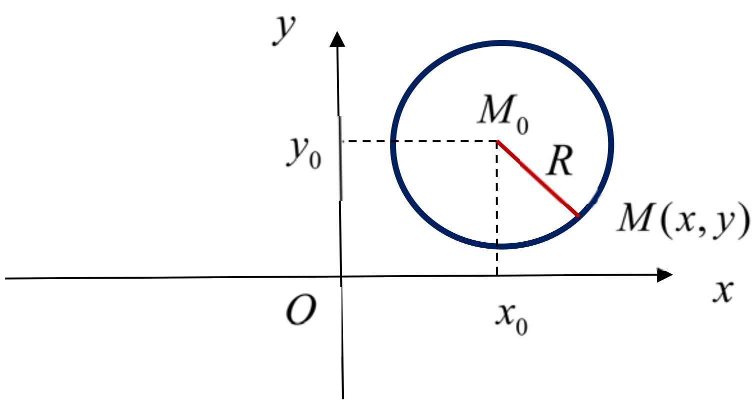

Рис. 1.

В частности, **уравнение окружности с центром в начале координат** и радиусом R есть

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}. \qquad (2)$$

Задача 1. Найдите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 36$.

б) $(x+1)^2 + y^2 = 7$.

Ответ: а) $M_0(5;-3), R = 6$**, б)** $M_0(-1;0), R = \sqrt{7}$**.**

Задача 2. Составьте уравнение окружности, если:

а) $M_0(0;5)$ – центр окружности, $R = 3$.

б) $M_0(-3;-7)$ – центр окружности, $R = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: а) $x^2 + (y-5)^2 = 9$**, б)** $(x+3)^2 + (y+7)^2 = \dfrac{1}{4}$**.**

Задача 3. Найдите координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 29 = 0.$$

Решение. Воспользуемся процедурой **выделения полного квадрата** – такого тождественного преобразования, при котором квадратный трехчлен представляется в виде $(a \pm b)^2 + c$ – суммы или разности квадрата двучлена и некоторого числового или буквенного выражения.

Метод выделения полного квадрата основан на использовании формул сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{полный квадрат}}$$

Выделим полные квадраты в выражениях, содержащих одну и ту же переменную.

1) Рассмотрим выражение $x^2 + 8x$.

$$x^2 + 8x$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Легко заменить, что в нашем выражении в качестве a выступает x. Значит $8x$ должно быть удвоенным произведением. Найдем b. Для этого представим $8x$ в виде произведения:

$$x^2 + 2x \cdot 4$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Не трудно заменить, что $b = 4$. Для полного квадрата нам не хватает b^2, значит нам не хватает 16. Добавим. А чтобы выражение не изменилось вычтем 16. Фактически ничего не изменилось. Только форма. И благодаря этому, мы можем записать первые три слагаемых как квадрат суммы.

$$x^2 + 8x = (x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2) - 4^2 = (x+4)^2 - 16 .$$

2) Рассмотрим выражение $y^2 - 4y$ и проведем аналогичную процедуру выделения полного квадрата:

$$y^2 - 4y = (y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 4) - 4 = (y-2)^2 - 4\,.$$

Тогда уравнение окружности $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 29 = 0$ принимает вид:

$$(x+4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 - 29 = 0$$

или

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 49\,.$$

Согласно формуле (1), центр окружности находится в точке $(-4,2)$ и радиус $R = \sqrt{49} = 7\,.$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Постройте окружности:

а) $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$,

б) $x^2 + y^2 + x - 2 = 0$,

в) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$.

Ответ: а) $M_0(5;3), R = 6$**, б)** $M_0(-0,5;0), R = 1,5$**, в)** $M_0(-1;2/3), R = \dfrac{\sqrt{19}}{3}$**.**

2. Найдите точки пересечения окружности $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$ и прямой $y = x - 3$.

Ответ: $(4;1), (-2;-5)$.

2 Сфера, ее каноническое уравнение

Определение. **Сферой** называется поверхность, состоящая из множества всех точек пространства, равноудаленных от заданной точки, называемой **центром,** на некоторое расстояние R, называемое **радиусом**.

Другим определением сферы может служить следующее:

Сфера – тело, полученное в результате вращения полуокружности вокруг ее диаметра.

Определение. Часть пространства, ограниченная сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

Каноническое уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2} \tag{3}$$

получается из определения сферы аналогично уравнению окружности.

На рисунке 2 показана сфера с центром в начале координат. Ее уравнение

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}. \tag{4}$$

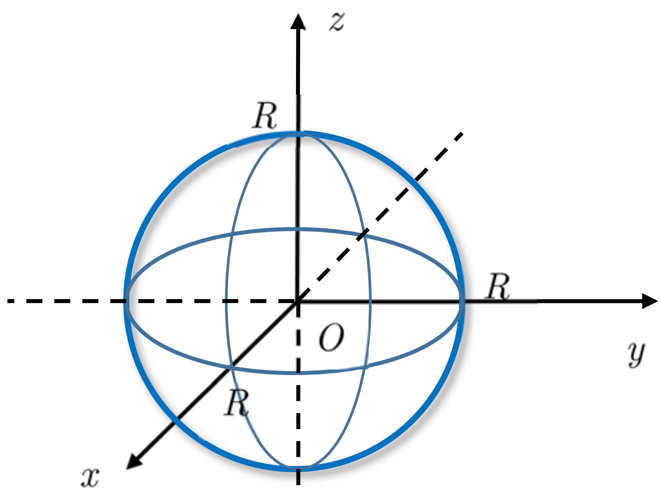

Рис. 2.

Как изобразить сферу?

1. Отметить центр сферы (точку M_0).
2. Начертить окружность с центром в точке M_0 и радиусом R.
3. Изобразить видимую вертикальную дугу (меридиан).
4. Изобразить невидимую вертикальную дугу.
5. Изобразить видимую горизонтальную дугу (параллель).
6. Изобразить невидимую горизонтальную дугу.
7. Провести радиус сферы.

Задачи для самостоятельного решения:

В данных уравнениях найдите координаты центра и радиус сферы:

1. $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=9$.

2. $(x-6)^2+(y+0{,}5)^2+z^2=5$.

3. $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$.

Ответ: 1. $M_0(2;-4;7), R=3$, **2.** $M_0(6,-0{,}5;0), R=\sqrt{5}$,

3. $M_0(1{,}5;-2{,}5;2), R=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.