Занятие 2.1

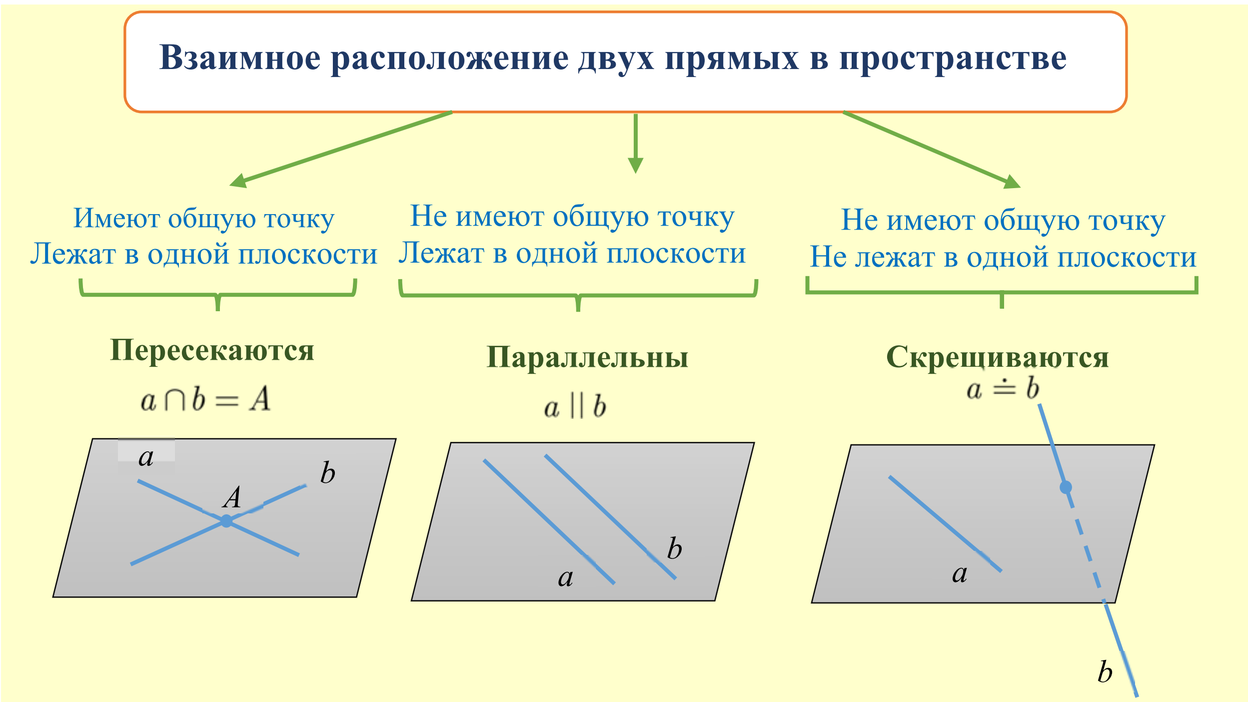
Прямые и плоскости. Векторно-координатный метод

Векторно-координатный – весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов (между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями) или расстояний (от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми) в пространстве.

Решая ту или иную математическую или физическую задачи векторно-координатным методом, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

Данный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении необходимых векторов (их длин и углов между ними). Рассмотрим векторно-координатный метод при исследовании взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

1 Нахождение угла между двумя прямыми в пространстве



Определение. **Угол между параллельными прямыми (или прямыми, которые совпадают)** считают равным 0°.

Определение. **Угол между пересекающимися прямыми** – меньший из углов, образующихся при пересечении прямых.

Определение. **Угол между скрещивающимися прямыми** – меньший угол между прямыми, которые пересекаются и которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Данный угол между двумя прямыми векторно-координатным методом определяется, как угол между их направляющими векторами (векторами, лежащими на прямых, или им параллельных).

Алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми:

1. Ввести систему координат и вписать в нее данную фигуру.
2. Выбрать на каждой прямой по две точки и найти координаты их направляющих векторов $\vec{s}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{s}_2 = (x_2; y_2; z_2)$.
3. Вычислить искомый угол φ по формуле:

$$\boxed{\cos\varphi = \left|\cos(\vec{s}_1, \widehat{\ } \vec{s}_2)\right| = \frac{\left|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right|}{|\ \vec{s}_1\ | \cdot |\ \vec{s}_2\ |} = \frac{|\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\ |}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}.$$

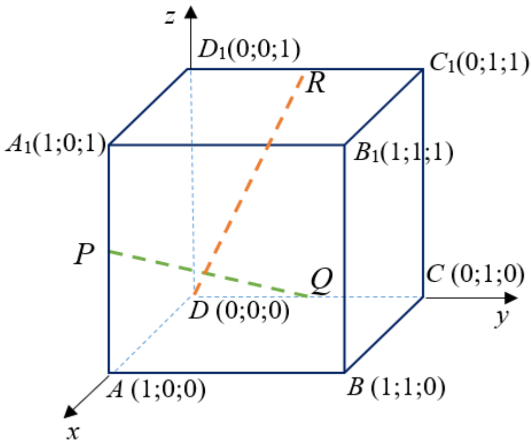
Пример 1. На ребрах AA_1, CD и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q, R – середины этих ребер. Найдите угол, который образует прямая PQ с прямой DR.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, P, Q, R – середины ребер AA_1, CD и C_1D_1 соответственно.

Найти: угол между прямыми (PQ) и (DR).

Решение.

1) Расположим систему координат так, что точка D – начало координат. Пусть ось x проходит через ребро AD, ось y – через ребро DC, ось z – через ребро DD_1.
2) Если длина ребра куба не дана, то ее можно принять равной 1. На чертеже показаны координаты вершин куба в выбранной системе



координат. Точки P, Q, R – середины ребер AA_1, CD и C_1D_1, следовательно, их координаты $P(1;0;1/2)$, $Q(0;1/2;0)$, $R(0;1/2;1)$. Запишем координаты векторов:

$$\overrightarrow{PQ} = \left(0-1;1-0;0-\frac{1}{2}\right) = \left(-1;1;-\frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{DR} = \left(0-0;\frac{1}{2}-0;1-0\right) = \left(0;\frac{1}{2};1\right).$$

3) Найдем угол между векторами $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{DR}$. Вычислим длины векторов и их скалярное произведение:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1/2)^2} = \sqrt{9/4} = 3/2,$$

$$|\overrightarrow{DR}| = \sqrt{0^2+(1/2)^2+1^2} = \sqrt{5/4} = \sqrt{5}/2,$$

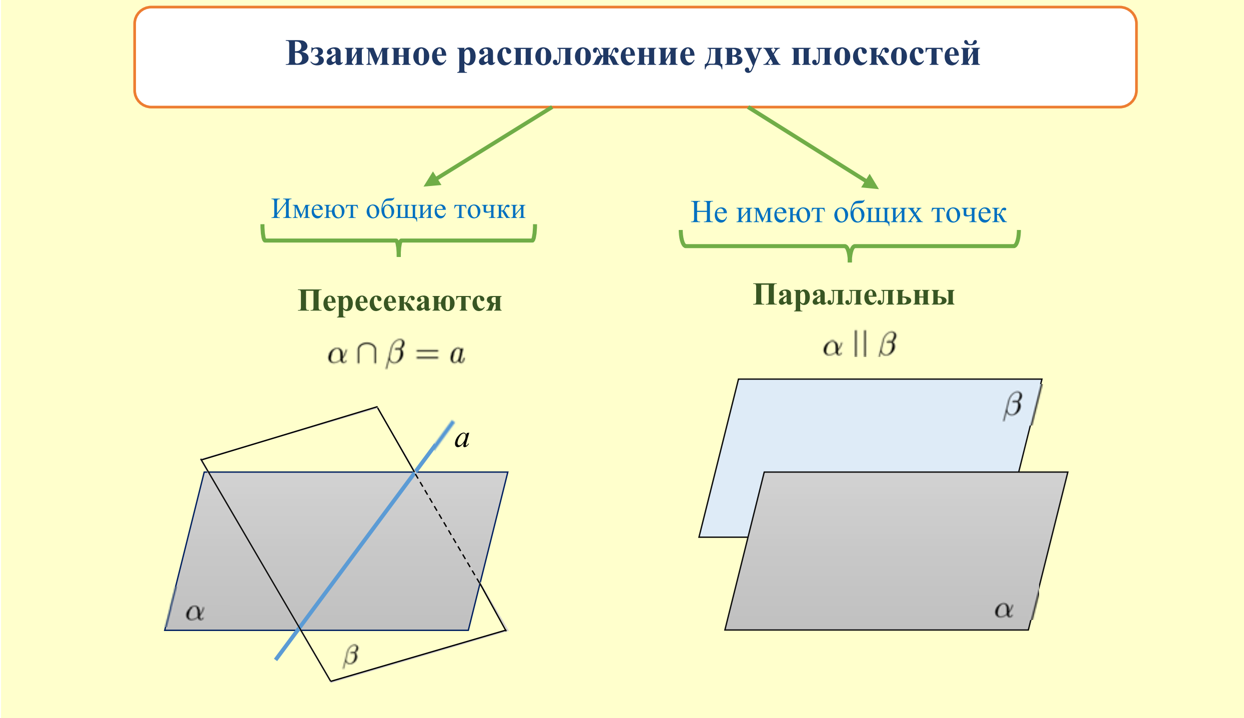
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DR} = -1\cdot 0 + 1\cdot 1/2 + (-1/2)\cdot 1 = 0.$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DR}\right|}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{DR}|} = \frac{0}{3/2\cdot\sqrt{5}/2} = 0.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{DR}$, а также и прямые (PQ) и (DR) перпендикулярны.

Ответ: 90°.

2 Нахождение угла между двумя плоскостями



Определение. **Угол между параллельными или совпадающими плоскостями** считают равным 0°.

Определение. **Угол между двумя плоскостями** равен меньшему углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям (рис. 1).

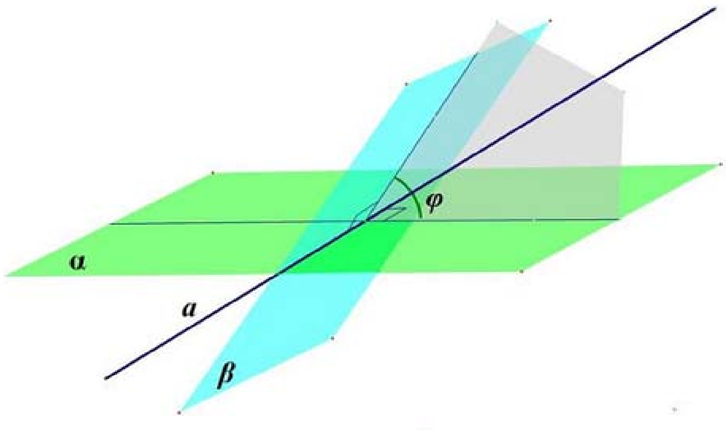


Рис. 1. Угол между плоскостями.

В качестве угла между двумя плоскостями берется меньший из углов, образованный этими плоскостями.

При использовании векторно-координатного метода в качестве угла между плоскостями используют угол между векторами, перпендикулярными данным плоскостям. Их называют *нормальными векторами* или *векторами нормали*.

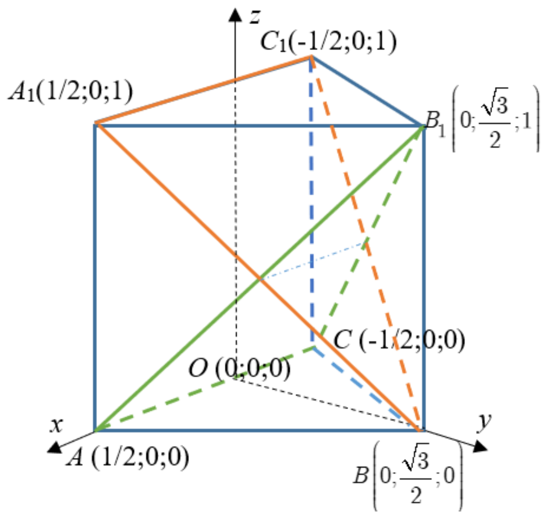
Алгоритм нахождения угла между плоскостями:

1. Ввести систему координат и вписать в нее данную фигуру.
2. Найти векторы $\vec{n}_1=(a_1;b_1;c_1)$ и $\vec{n}_2=(a_2;b_2;c_2)$, перпендикулярные к данным плоскостям (векторы нормали).
3. Вычислить искомый угол φ по формуле:

$$\boxed{\cos\varphi=\left|\cos(\vec{n}_1,\widehat{\ }\vec{n}_2)\right|=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}.$$

Пример 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между плоскостями (ACB_1) и (BA_1C_1).

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, AB=AA_1=1.



Найти: косинус угла между плоскостями (ACB_1) и (BA_1C_1).

Решение.

1) Введем декартову систему координат так, что точка O – начало координат – основание высоты (биссектрисы и медианы) OB равностороннего треугольника ABC. Пусть ось x проходит через ребро AC, ось y – через высоту OB.
2) Координаты вершин призмы показаны на чертеже. Пусть $\vec{n}_1=(a_1;b_1;c_1)$ – вектор нормали плоскости (ACB_1). Этот вектор перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AC}=(-1;0;0)$ и $\overrightarrow{AB_1}=\left(-1/2;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, лежащим в плоскости ($ACB_1$). Следовательно, скалярное произведение $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}_1=0$ и $\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}_1=0$. Тогда

$$\begin{cases} -1 \cdot a_1 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot c_1 = 0, \\ -\frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b_1 + 1 \cdot c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0, \\ c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} b_1. \end{cases}$$

Пусть $b_1 = 2$, тогда $c_1 = -\sqrt{3}$ и $\vec{n}_1 = \left(0;2;-\sqrt{3}\right)$.

Аналогично найдем координаты вектора нормали $\vec{n}_2 = (a_2;b_2;c_2)$ плоскости (BA_1C_1), который будет перпендикулярен векторам $\overrightarrow{A_1B} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$ и $\overrightarrow{A_1C_1} = (-1;0;0)$. Имеем

$$\begin{cases} -1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot c_2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \cdot a_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b_2 - 1 \cdot c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0, \\ c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} b_2. \end{cases}$$

Отсюда $\vec{n}_2 = \left(0;2;\sqrt{3}\right)$.

3) Найдем угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Вычислим длины векторов и их скалярное произведение:

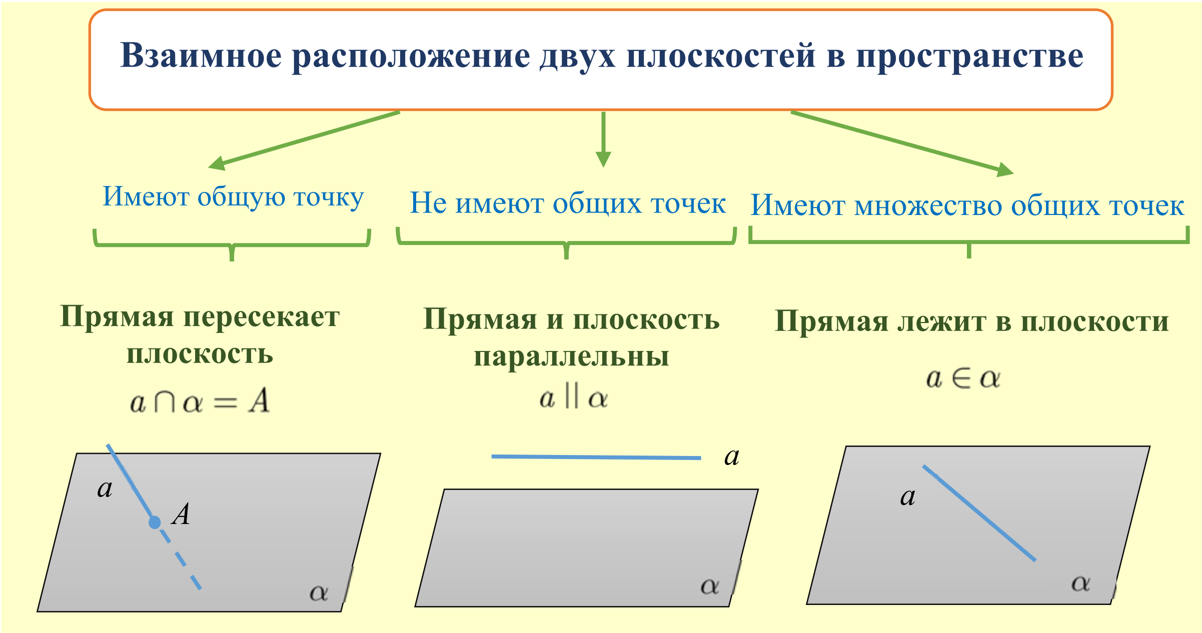
$$|\vec{n}_1| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}, \ |\vec{n}_2| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -1.$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: 1/7.

3 Нахождение угла между прямой и плоскостью



Определение. **Прямая, перпендикулярная плоскости**, – прямая, перпендикулярная какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Определение. **Угол между прямой и плоскостью, параллельной прямой или содержащей эту прямую**, считают равным 0°.

Определение. **Угол между плоскостью и прямой, пересекающей плоскость**, – угол между прямой и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость (рис. 2).

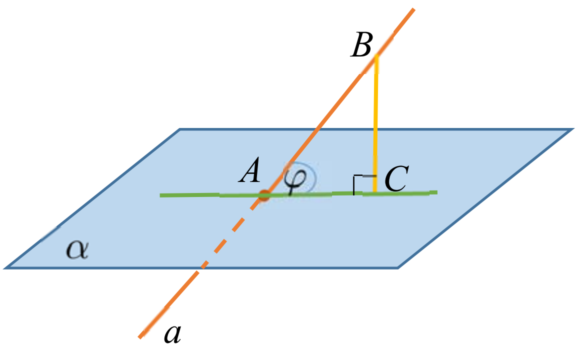


Рис. 2. Угол между прямой и плоскостью.

Угол между прямой и плоскостью векторно-координатным методом определяется, как угол между направляющим вектором прямой и вектором нормали плоскости.

Алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью:

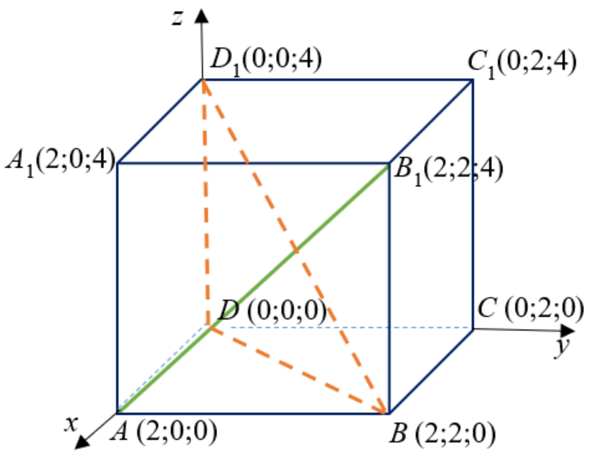
1. Ввести систему координат и вписать в нее данную фигуру.
2. Выбрать на прямой две точки и найти координаты направляющего вектора $\vec{s}=(x;y;z)$. Затем найти координаты вектора нормали плоскости $\vec{n}=(a;b;c)$.
3. Вычислить искомый угол φ по формуле:

$$\boxed{\cos(90^\circ-\varphi)=\sin\varphi=\left|\cos(\widehat{\vec{s},\ \vec{n}})\right|=\frac{|\,\vec{s}\cdot\vec{n}\,|}{|\,\vec{s}\,|\cdot|\,\vec{n}\,|}=\frac{|\,ax+by+cz\,|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Пример 3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра равны 4, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырехугольная призма, $AB=2$, $AA_1=4$.

Найти: угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.



Решение. 1) Расположим систему координат так, что точка D – начало координат. Пусть ось x проходит через ребро AD, ось y – через ребро DC, ось z – через ребро DD_1.

На чертеже показаны координаты вершин призмы в выбранной системе координат.

2) Вычислим координаты направляющего вектора прямой AB_1

$$\overrightarrow{AB_1}=(2-2;2-0;4-0)=(0;2;4).$$

3) Найдем координаты вектора нормали $\vec{n}=(a;b;c)$ плоскости (BDD_1). Этот вектор будет перпендикулярен векторам $\overrightarrow{DB}=(2;2;0)$ и $\overrightarrow{DD_1}=(0;0;4)$. Имеем

$$\begin{cases}2a+2b+0\cdot c=0,\\ 0\cdot a+0\cdot b+4c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a,\\ c=0.\end{cases}$$

Пусть $a=1$, тогда $\vec{n}=(1;-1;0)$.

4) Найдем косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{n}$.

$$|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = -2.$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB_1}; \vec{n}}) = \sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и DE, если E – середина ребра CC_1.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

2. В правильной треугольной призме все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ACD_1 и BDC_1.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

4. Ребро основания правильной шестиугольной призмы равно 1, а боковое ребро – 2. Найдите угол между плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ S – вершина, ребро основания равно 4, а высота – 6. Найдите угол между прямой BE, где E – середина SC и плоскостью ADS.

Ответ: $\arcsin\frac{6}{\sqrt{190}}$.