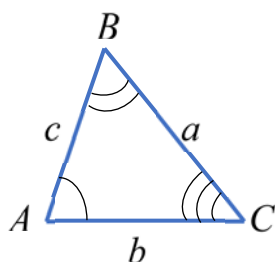


## Занятие 1.3

## Треугольник, параллелограмм

## 1 Соотношения между сторонами и углами треугольника

## 1.1 Произвольный треугольник



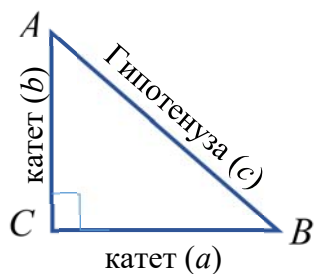
**Теорема синусов:**  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Длины сторон треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

**Теорема косинусов:**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Квадрат длины любой стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними

## 1.2 Прямоугольный треугольник



$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

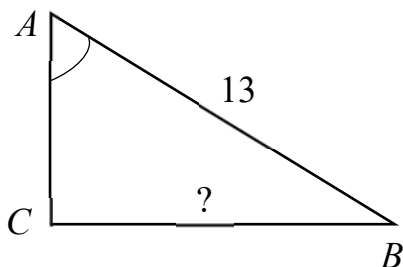
$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$

**Теорема Пифагора:**  $c^2 = a^2 + b^2$

**Пример 1.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB=13$ ,  $\cos A = \frac{12}{13}$ .

Найдите  $BC$ .

Дано:  $\triangle ABC$  – прямоугольный,  $\angle C=90^\circ$ ,  $AB=13$ ,  $\cos A = \frac{12}{13}$ .



Найти:  $BC$ .

Решение.

1.  $\cos A = \frac{AC}{AB}$ . Отсюда

$$AC = AB \cdot \cos A = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12.$$

2. По теореме Пифагора

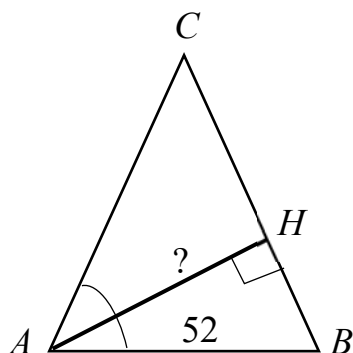
$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5.$$

**Ответ:** 5.

**Пример 2.** В треугольнике  $ABC$   $AC=BC$ ,  $AB=52$ ,  $\cos A = \frac{3\sqrt{11}}{10}$ . Найдите

высоту  $AH$ .

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AC=BC$ ,  $AB=52$ ,  $\cos \angle CAB = \frac{3\sqrt{11}}{10}$ ,  $AH$  – высота.



Найти:  $AH$ .

Решение.

1.  $\triangle ABC$  – равнобедренный, т.к.  $AC=BC$ .  
Следовательно,

$$\angle CAB = \angle CBA = \angle ABH.$$

2. Из  $\triangle AHB$

$$\sin \angle HBA = \frac{AH}{AB}. \text{ Отсюда}$$

$$AH = AB \cdot \sin \angle ABH.$$

2. Воспользуемся основным

тригонометрическим тождеством:

$$\sin \angle ABH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABH} = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \sqrt{1 - \frac{99}{100}} = 0,1.$$

Отсюда  $AH = 52 \cdot 0,1 = 5,2$ .

**Ответ:** 5,2.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $\cos A = 0,5$ . Найдите  $AB$ .

Ответ: 8.

2. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 2$ ,  $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$ . Найдите  $BC$ .

Ответ: 0,5.

3. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{33}}{4}$ ,  $AC = 4$ . Найдите  $AB$ .

Ответ: 7.

4. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  – высота,  $AB=13$ ,  $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$ .

Найдите  $AH$ .

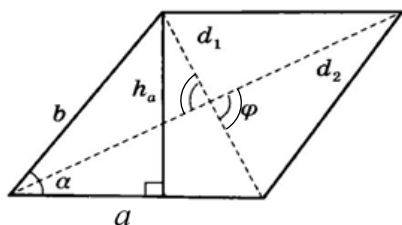
Ответ: 12,5.

5. В треугольнике  $ABC$   $AC=BC$ , высота  $CH=10$ ,  $AB=15$ . Найдите  $\cos A$ .

Ответ: 0,6.

## 2 Вычисление площадей параллелограмма и треугольника

### 2.1 Площадь параллелограмма



$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

$$S = ah_a \Rightarrow h_a = \frac{S}{a}$$

$a, b$  – стороны параллелограмма,

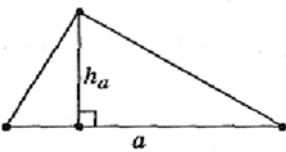
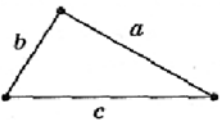
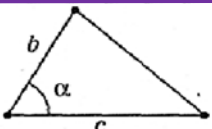
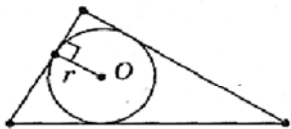
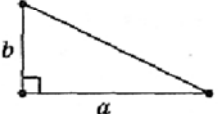
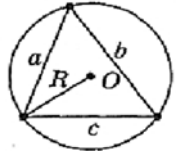
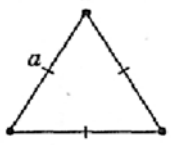
$\alpha$  – угол между сторонами,

$h_a$  – высота, проведенная к стороне  $a$ ,

$d_1, d_2$  – диагонали параллелограмма,

$\varphi$  – угол между диагоналями

## 2.2 Площадь треугольника

$S = \frac{1}{2} a h_a$ 	 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ <p style="text-align: center;"><math>(p - \text{полупериметр})</math></p>
$S = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$ 	$S = pr$ 
$S = \frac{1}{2} ab$ 	$S = \frac{abc}{4R}$ 
$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ 	

$a, b, c$  – стороны треугольника,

$$p = \frac{a + b + c}{2} \text{ – полупериметр,}$$

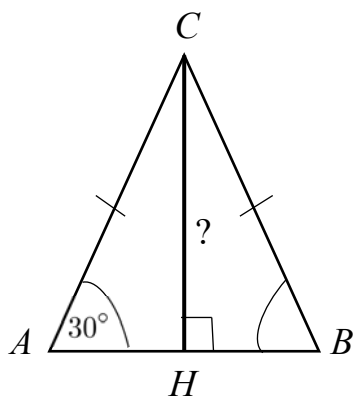
$\alpha$  – угол между сторонами,

$h_a$  – высота, проведенная к стороне  $a$ ,

$r$  – радиус вписанной окружности,

$R$  – радиус описанной окружности

**Пример 3.** Площадь равнобедренного треугольника равна  $4\sqrt{3}$ , а углы при основании  $30^\circ$ . Найдите высоту, опущенную на основание этого треугольника.



*Дано:*  $\triangle ABC$  – равнобедренный,  $AC=BC$ ,  
 $S_{ABC} = 4\sqrt{3}$ ,  $\angle CAB = \angle CBA = 30^\circ$ ,  $CH$  –  
 высота.

*Найти:*  $CH$ .

*Решение.*

1. Так как  $\triangle ABC$  – равнобедренный и  $\angle CAB = \angle CBA$ , то  $AC=BC$ . Следовательно,  $CH$  – высота, биссектриса и медиана. Тогда  $AH=2AB$ .

$$2. S_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AB \cdot CH = 8\sqrt{3}.$$

3. Из  $\triangle AHC$   $\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC}$ . Отсюда  $CH = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AC$ . И по

теореме Пифагора  $CH = \frac{1}{2} \sqrt{CH^2 + AH^2}$ .

4. Обозначим  $AH = x$ ,  $CH = y$ , тогда

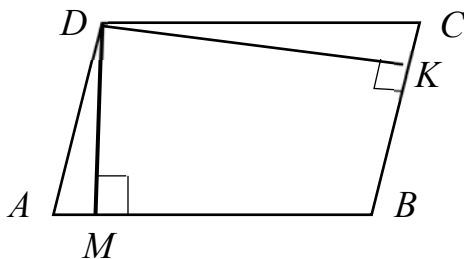
$$\begin{cases} 2xy = 8\sqrt{3}, \\ y = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 8\sqrt{3}, \\ 4y^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2xy = 8\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}y^2 = 8\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

**Ответ:** 2.

**Пример 4.** Длины высот параллелограмма  $h_1=3$ ,  $h_2=5$ , а его периметр  $P=32$ . Найдите площадь параллелограмма.



*Дано:*  $ABCD$  – параллелограмм,  $DM$ ,  $DK$  – высоты,  $DM=3$ ,  $DK=5$ ,  $P_{ABCD}=32$ .

*Найти:*  $S_{ABCD}$ .

*Решение.*

1.  $S_{ABCD} = AB \cdot DM = CB \cdot DK$ . Тогда

$$3AB = 5CB. \text{ Следовательно, } AB = \frac{5}{3}CB$$

2.  $P_{ABCD} = 2(AB + CB) = 32$ . Отсюда  $AB + CB = 16$ . Тогда

$$\frac{5}{3}CB + CB = 16 \Leftrightarrow \frac{8}{3}CB = 16 \Leftrightarrow CB = 6.$$

3.  $S_{ABCD} = CB \cdot DK = 6 \cdot 5 = 30$

**Ответ:** 30.

### **Задачи для самостоятельного решения**

6. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

**Ответ:** 24.

7. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен  $30^\circ$ .

**Ответ:** 24.

8. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $135^\circ$ ,  $AC = 6$  дм, высота  $BD = 2$  дм.

Найдите площадь треугольника  $ABD$ .

**Ответ:** 8 дм<sup>2</sup>.

9. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

**Ответ:** 6.

10. В параллелограмме  $ABCD$   $AB = 3$ ,  $AD = 21$ ,  $\sin A = \frac{6}{7}$ . Найдите большую

высоту параллелограмма.

**Ответ:** 18.

11. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

**Ответ:** 6.

### **Задачи для домашнего решения**

1. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  – высота,  $AH = 27$ ,  $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$ .

Найдите  $BH$ .

**Ответ:** 12.

2. Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.

**Ответ:** 6.

3. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при вершине  $120^\circ$ , а площадь треугольника равна  $3\sqrt{3}$ .

**Ответ:** 6.

4. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

**Ответ:** 8.