Занятие 1.2

1 Векторы на плоскости

Некоторые физические величины (сила, скорость, ускорение) характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Например, чтобы охарактеризовать движение тела в данный момент времени, не достаточно указать скорость движения, а нужно еще указать направление движения тела, т.е. направление скорости. Таким образом, скорость является векторной величиной. Другими примерами векторных величин могут служить сила притяжения, центробежное ускорение и т.п.

Определение. Если на некотором отрезке задано начало отрезка и его конец, то такой отрезок называется **направленным.**

Вектор – направленный отрезок.

Обозначение: если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 1).

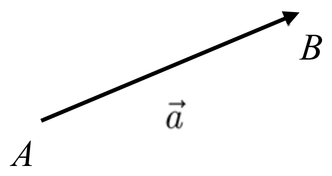

Рис. 1.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Определение. Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление) или **противоположно направлены**.

Понятия «больше» и «меньше» для векторов не существует – ведь направления их могут быть разными. Сравнивать можно только длины векторов. А вот понятие равенства для векторов есть.

Определение. Два вектора называются **равными** ($\vec{a} = \vec{b}$), если

1) они коллинеарны и сонаправлены;

2) имеют равные длины, т.е. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости.

Пример 1. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 2). Указать равные векторы.

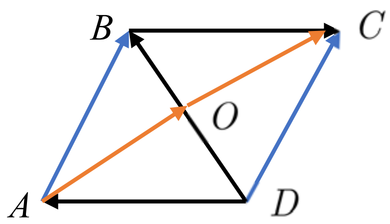

Рис. 2.

Решение. 1) Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны (лежат на параллельных прямых) и сонаправлены, а в силу свойства параллелограмма $AB = DC$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2) Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат на одной прямой, диагонали параллелограмма $ABCD$. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма (середина AC). Следовательно, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

Ответ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Определение. **Единичным** называется вектор, длина которого равна 1. **Нулевым** $\vec{o}$ – вектор, длина которого равна нулю, то есть его начало совпадает с концом. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

2 Действия над векторами

2.1 Сложение векторов

Определение. **Суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ перенесено в конец вектора $\vec{a}$.

Для сложения векторов есть два способа.

1. *Правило треугольника*. Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем точку O и построим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3).

По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего (рис. 4).

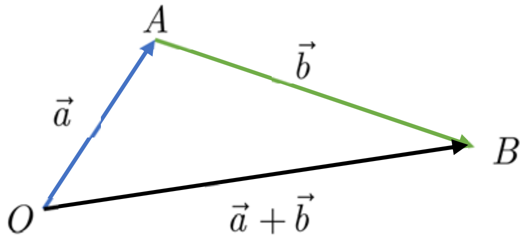

Рис. 3. Сумма двух векторов: правило треугольника.

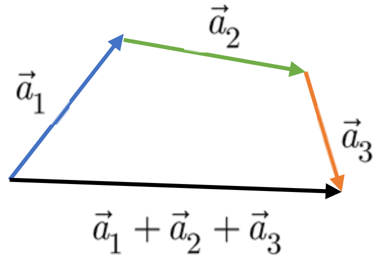

Рис. 4. Сумма трех векторов.

2. *Правило параллелограмма*. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5).

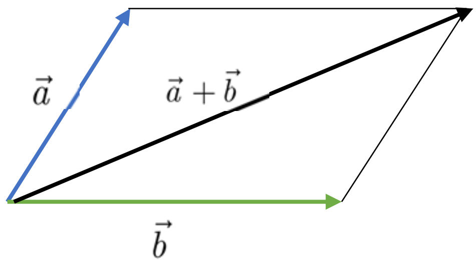

Рис. 5. Сумма двух векторов: правило параллелограмма.

2.2 Вычитание векторов

Вектор $-\vec{b}$ направлен противоположно вектору $\vec{b}$. Длины векторов $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ равны (рис. 6).

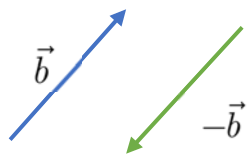

Рис. 6. Противоположно направленные векторы.

Определение. Под **разностью векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ такой, что $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно соединить сначала их начала в некоторой произвольной точке плоскости. А затем, соединив концы, получить искомую разность (рис. 7).

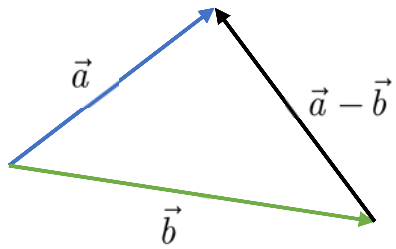

Рис. 7. Разность двух векторов.

2.3 Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ получается вектор $\overrightarrow{\lambda a}$, длина которого в λ раз отличается от длины вектора $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если λ больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если λ меньше нуля (рис. 8).

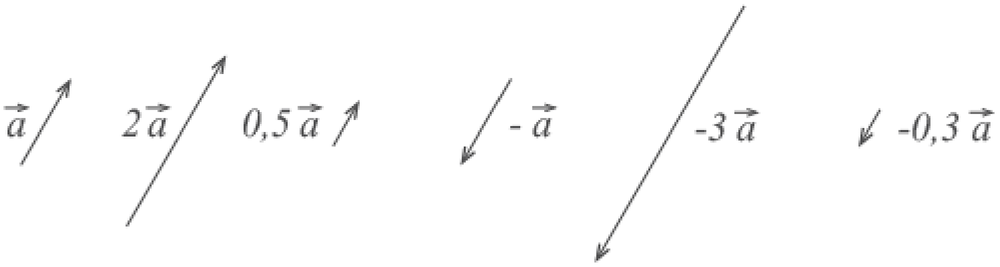

Рис. 8. Умножение вектора на число.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $5\vec{a}+3\vec{b}$.

<u>*Решение*</u>. Возьмем произвольную точку M и отложим от нее вектор $5\vec{a}$. Из конца A этого вектора отложим вектор $3\vec{b}$. Соединив точку M с концом B вектора $3\vec{b}$, получим вектор, представляющий собой сумму векторов $5\vec{a}+3\vec{b}$ (рис. 9).

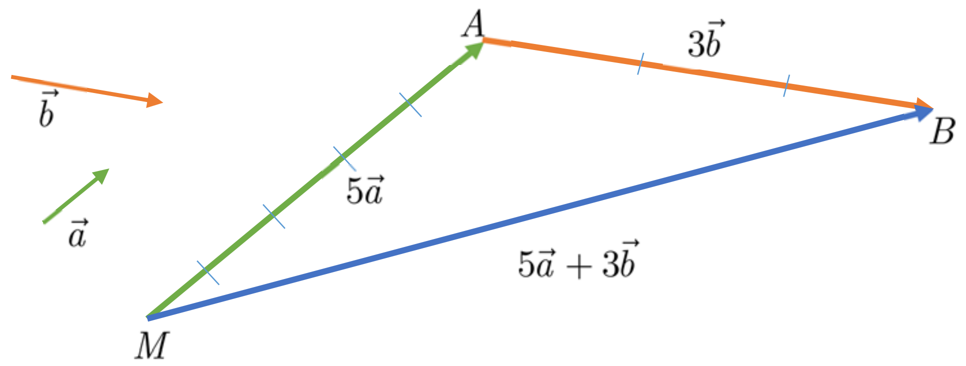

Рис. 9.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.10). Построить вектор $\vec{a}-2\vec{b}$.
2. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 11). Построить вектор $\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

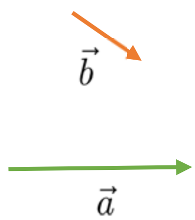

Рис. 10.

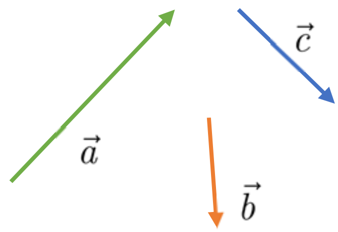

Рис. 11.

3 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Определение. Рассмотрим произвольные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если вектор $\vec{c}$ представлен в виде $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то говорят, что **вектор** $\vec{c}$ **разложен по векторам** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$. Числа x и y называются **коэффициентами разложения – координатами вектора** $\vec{c}$ при разложении по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема. На плоскости любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Лемма. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{o}$, то существует такое число λ, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Пример 3. В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\vec{q}=\overrightarrow{DE}$, конец которого является серединой диагонали AC.

<u>*Решение*</u>. Точка E – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 12).

$$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).$$

Тогда $\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

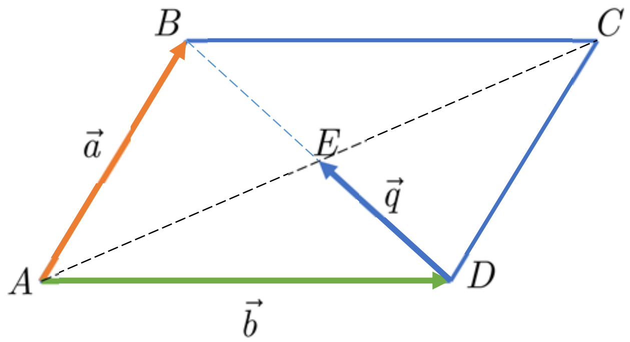

Рис. 12.

Ответ: $\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\vec{q}=\overrightarrow{CE}$, конец которого является серединой стороны AD.

Ответ: $\vec{q}=-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

2. Разложить следующие векторы по векторам $\vec{e}_1,\vec{e}_2$:

   а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ (M и N – середины сторон AB и AC треугольника ABC) (рис. 13);

   б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ (рис. 14).

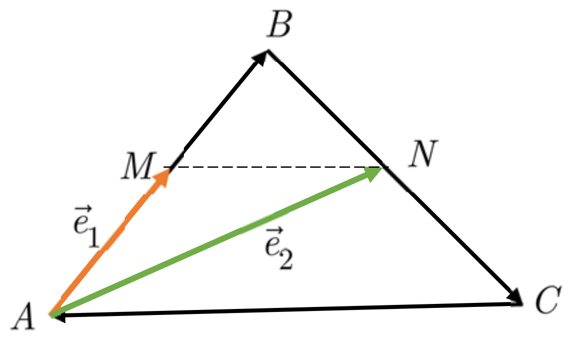

Рис. 13.

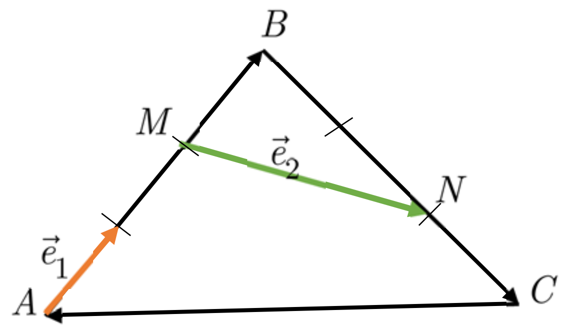

Рис. 14.

Ответ: а) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_1$, $\overrightarrow{CA} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$; б) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_1$, $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1)$, $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

4 Координаты вектора в декартовой системе координат. Действия над векторами в координатной форме

Введем на плоскости два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$, выходящих из одного начала O (**начала координат**), один из которых направлен вдоль оси Ox – **оси абсцисс**, а другой вдоль оси Oy – **оси ординат**.

Также рассмотрим какую-нибудь точку $M(x;y)$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ – **радиус-вектор точки** M. При этом справедливо равенство

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x;y).$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка M (рис. 15).

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ не проходит через начало координат, то его координаты находятся просто: координата конца вектора минус координата его начала (рис. 16):

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A)}.$$

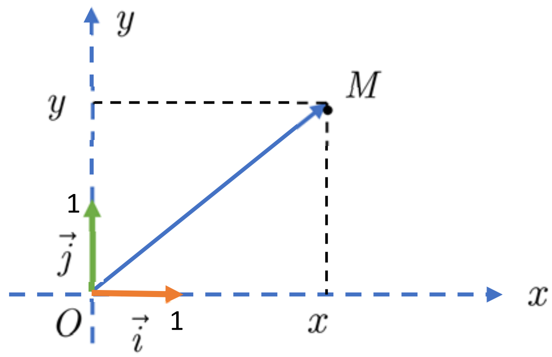

Рис. 15. Координаты радиус-вектора.

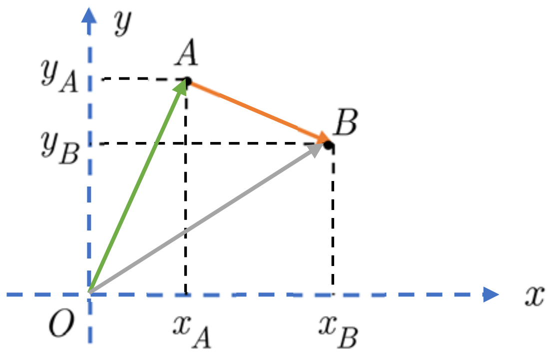

Рис. 16. Координаты вектора.

Если заданы координаты начала и конца вектора, то его длина находится по формуле

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Если векторы $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ заданы своими координатами, то:

1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2; \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

2) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$;

3) $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1)$, $\lambda \in \mathrm{R}$;

4) $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Пример 4. Даны векторы $\vec{a} = (-2;1), \vec{b} = (0;7)$. Найти: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $2\vec{a} - 6\vec{b}$; в) $|2\vec{a} - 6\vec{b}|$.

Решение. Согласно приведённым правилам, получим:

а) $\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 0; 1 + 7) = (-2; 8)$;

б) $2\vec{a} - 6\vec{b} = (2 \cdot (-2) - 6 \cdot 0; 2 \cdot 1 - 6 \cdot 7) = (-4; -40)$;

в) $|2\vec{a} - 6\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (-40)^2} = 4\sqrt{1 + 10^2} = 4\sqrt{101}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Даны векторы $\vec{a} = (3;5), \vec{b} = (2;-7)$. Найти: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $4\vec{a} + 3\vec{b}$.

Ответы: а) $(1;12)$, б) $(18;-1)$.

2. Даны точки $A(3;-1), B(0;-5), C(-2;1)$. Найти: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\vec{m}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-0,5\overrightarrow{AC}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$, $\overrightarrow{BC}=(-2;6)$, $\overrightarrow{CA}=(5;-2)$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-5;-2)$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-2;4)$, $\vec{m}=(7,5;-1)$.

3. Даны точки $A(3;-1), B(0;-5), C(-2;1)$. Найти: длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: $|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{29}$.

4. Дан треугольник с вершинами $A(7;7), B(4;3), C(3;4)$. Найти его периметр.

Ответ: $10+\sqrt{2}$.