Занятие 1.1

Основные методы решения систем алгебраических уравнений

Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких (или одной) переменных.

Другими словами, если задано несколько уравнений с одной, двумя или больше неизвестными, и все эти уравнения (равенства) должны одновременно выполняться, такую группу уравнений мы называем **системой.**

Объединяем уравнения в систему с помощью фигурной скобки.

Решить систему уравнений – значит найти не просто решение, а комплекты решений, то есть такие значения всех переменных, которые, будучи одновременно подставленными в систему, обращают каждое ее уравнение в тождество. При решении систем уравнений можно применять следующие методы (про ОДЗ (область допустимых значений) системы при этом не забываем):

- Метод подстановки.
- Графический метод.
- Метод расщепления системы.
- Метод почленного сложения (вычитания) уравнений системы.
- Метод деления и умножения.
- Метод замены переменных.

1 Метод подстановки

Это самый простой метод, но зачастую – самый трудоемкий. Идея проста – нужно:

1) в одном из уравнений системы (более простом) выразить одну переменную через другие;
2) полученное выражение подставить в остальные уравнения вместо этой переменной;
3) затем точно так же выражаем и подставляем другую переменную и т.д., пока не получим уравнение с одной переменной;
4) после решения этого уравнения и нахождения значения (или значений) одной из переменных – последовательно возвращаемся к ранее выраженным переменным, подставляя найденные значения.

5) записываем ответ.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ x-10y=3. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения очень просто выразить x, т.к. коэффициент при этой переменной в этом уравнении равен одному:

$$x-10y=3 \Leftrightarrow x=3+10y.$$

Теперь подставим то, что получилось вместо x в первое уравнение системы. Мы получили уравнение с одной неизвестной, которое очень просто решить:

$$2(3+10y)+5y=1 \Leftrightarrow 6+20y+5y=1 \Leftrightarrow 25y=-5 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{5}.$$

А теперь вернемся к выражению для переменной x и подставим в него полученное значение y:

$$x=3+10\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=3-2=1.$$

Итак,

Ответ: $x=1;\ y=-\frac{1}{5}$.

Ответ, кстати, принято записывать как координаты, то есть в таком виде: $(x;y)$. В случае трех неизвестных: $(x;y;z)$ и так далее.

То есть ответ в нашем примере можно записать так:

Ответ: $\left(1;-\frac{1}{5}\right)$**.**

Задачи для самостоятельного решения:

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 6x-5y=32, \\ y+3x=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+xy-3=0, \\ x+5=y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x+2y-z=-5, \\ 3x-3y+z=7, \\ x+y-3z=-5. \end{cases}$

Ответы: 1. $(2;-4)$, 2. $(-3;2),(0,5;5,5)$, 3. $(0;-2;1)$.

2 Графический метод

Идея метода заключается в построении графика для каждого уравнения системы в одной системе координат и нахождении точек их пересечения – решения системы. Выше было замечено, что ответ после решения системы записывается так же, как координаты какой-нибудь точки.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y=12, \\ y-3x=-7. \end{cases}$

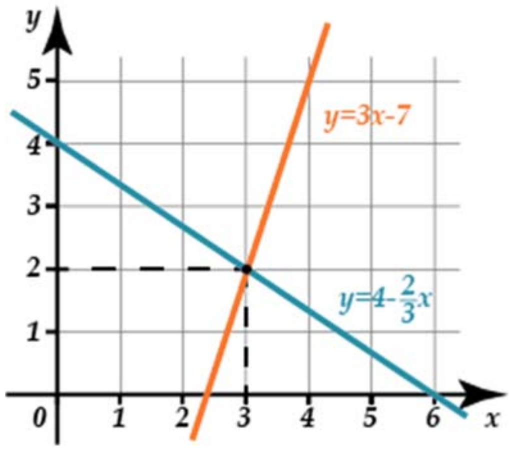
Решение.

Построим графики уравнений.

Функции, входящие в эти уравнения, являются линейными. Их графиками являются прямые линии. Выразим переменную y из каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} 2x+3y=12, \\ y-3x=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-\dfrac{2}{3}x, \\ y=3x-7 \end{cases}$$

и построим графики соответствующих функций в одной системе координат.



Видно, что графики пересекаются в точке с координатами (3; 2).

Ответ: (3; 2).

Задачи для самостоятельного решения:

Решите графически системы уравнений:

1. $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x}, \\ x+y=-2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y=3, \\ x-y+1=0. \end{cases}$

Ответ: 1. $(-3;1),(1;-3)$, 2. $(-2;-1),(1;2)$.

Графический метод – самый неточный. Практически его можно применять только для **систем линейных уравнений** (вида $y = ax + b$), графиками которых являются прямые. Если же хотя бы одно из уравнений имеет более сложный вид (содержит квадрат, корень, логарифм и т.д.), то не рекомендуется использовать графический метод (лучше использовать его только для иллюстраций).

3 Метод расщепления системы

Этот метод состоит в том, чтобы разложить одно из уравнений системы на множители. При этом необходимо чтобы справа в этом уравнении был нуль. Тогда приравнивая по очереди каждый множитель этого уравнения к нулю и дописывая остальные уравнения первоначальной системы, получим совокупность нескольких систем, каждая из которых будет проще первоначальной.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases}(x-5y)(x-3)=0,\\ 4y^2-xy+3y+4=0.\end{cases}$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$(x-5y)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-5y=0,\\ x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5y,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Тогда исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5y,\\ 4y^2-xy+3y+4=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=3,\\ 4y^2-xy+3y+4=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая каждую систему *методом подстановки*, получаем:

а) $\begin{cases}x=5y,\\ 4y^2-xy+3y+4=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5y,\\ y^2-3y-4=0,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-5,\\ y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=20,\\ y=4.\end{cases}\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}x=3,\\ 4y^2-xy+3y+4=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3,\\ 4y^2+4=0.\end{cases}$

Последнее уравнение системы действительных корней не имеет, следовательно, и система решений не имеет.

Ответ: $(-5;-1),(20;4)$.

Задача для самостоятельного решения:

Решите систему уравнений: $\begin{cases}(x-2y)(x+3)=0,\\ y^2-xy-3y+4=0.\end{cases}$

Ответ: $(2;1),(-8;-4)$.

4 Метод сложения

Данный метод состоит в том, чтобы, складывая либо вычитая два уравнения системы (их предварительно можно и часто нужно умножать на некоторый коэффициент), получить новое уравнение, которым заменить одно из уравнений первоначальной системы. Очевидно, что такая процедура имеет смысл, только если новое уравнение будет получаться значительно проще ранее имевшихся.

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases}2x-3y=8,\\ 4x-7y=18.\end{cases}$

Решение.

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим почленно со вторым:

$$\begin{cases}2x-3y=8,\\ 4x-7y=18.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x+6y=-16,\\ 4x-7y=18.\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-4x+6y=-16,\\ 4x-7y=18\end{cases}$$

$$-------------$$

$$-y=2 \Leftrightarrow y=-2.$$

В результате алгебраического сложения переменная x просто уничтожилась. По сути, это и была цель всего действия: **складываем уравнения только тогда, когда при этом получим более простое уравнение.**

Остается теперь только подставить в *любое* уравнение системы вместо y число -2, например, в первое:

$$\begin{cases}2x-3y=8,\\ y=-2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-3\cdot(-2)=8,\\ y=-2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=-2.\end{cases}$$

Ответ: $(1;-2)$.

Задачи для самостоятельного решения:

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 3x+2y=-1, \\ 5x-3y=11. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2-3x-2y=4, \\ x^2+x-3y=18. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x-xy=10, \\ y+xy=6. \end{cases}$

Ответ: 1. $(1;-2)$, 2. $(3;-2),(8;18)$, 3. $(5;1),\left(-\frac{2}{3};18\right)$.

5 Методы деления или умножения

Методы деления и умножения при решении систем уравнений основаны на следующем утверждении:

Теорема. Если обе части уравнения $f_2(x;y)=g_2(x;y)$ ни при каких значениях $(x;y)$ одновременно не обращаются в нуль, то системы

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_2(x;y)=g_2(x;y), \end{cases} \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_1(x;y)f_2(x;y)=g_1(x;y)g_2(x;y), \end{cases} \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)}=\dfrac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)} \end{cases}$$

равносильны.

Данные методы состоят в том, чтобы, разделив либо умножив соответственно левые и правые части двух уравнений системы, получить новое уравнение, и заменить им одно из уравнений первоначальной системы. Очевидно, что такая процедура опять-таки имеет смысл, только если новое уравнение будет получаться значительно проще ранее имевшихся.

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=64, \\ x^3y^4+x^4y^3=256. \end{cases}$

Решение.

Разложим на множители левые части каждого из уравнений системы:

$$\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=64, \\ x^3y^4+x^4y^3=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2(y+x)=64, \\ x^3y^3(y+x)=256. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое ($xy\neq 0, y+x\neq 0$):

$$\frac{x^{\cancel{3}}y^{\cancel{3}}\cancel{(y+x)}}{\cancel{x^2y^2}\cancel{(y+x)}}=\frac{256}{64}\Rightarrow xy=4.$$

Отсюда выразим одну из переменных через другую и подставим в *любое* из уравнений исходной системы. Можно перейти к следующей системе

$$\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=64, \\ y=\dfrac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2(y+x)=64, \\ y=\dfrac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^2\left(\dfrac{4}{x}+x\right)=64, \\ y=\dfrac{4}{x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы.

$$4^2\left(\frac{4}{x}+x\right)=64 \Leftrightarrow \frac{4}{x}+x=4\Big|\cdot x\neq 0,$$

$$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2.$$

Тогда

$$y=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: $(2;2)$.

Задача для самостоятельного решения:

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^5y^7=32, \\ x^7y^5=128. \end{cases}$

Ответ: $(-2;-1),(2;1)$.

6 Метод замены переменных

Суть метода состоит в замене какого-либо выражения (или выражений) в системе на новую переменную (или несколько переменных) так, чтобы вновь полученные уравнения стали более простыми.

Зачастую замена переменных подбирается индивидуально под каждый конкретный пример.

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy+x+y=29, \\ xy-2(x+y)=2. \end{cases}$

Решение.

Введем *замену переменных*:

$$\begin{cases} a=xy, \\ b=x+y. \end{cases}$$

Тогда система уравнений придёт к виду:

$$\begin{cases} a+b=29, \\ a-2b=2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$-\begin{cases} a+b=29, \\ a-2b=2. \end{cases}$$
$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$
$$3b=27 \Leftrightarrow b=9.$$

Подставим найденное значение b в первое уравнение системы:

$$a+9=29 \Leftrightarrow a=20.$$

Остается вернуться к исходным переменным (*обратная замена*):

$$\begin{cases} 20=xy, \\ 9=x+y. \end{cases}$$

Воспользуемся *методом подстановки*:

$$\begin{cases} 20=xy, \\ 9=x+y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y, \\ 20=(9-y)y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y, \\ y^2-9y+20=0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4;5),(5;4)$.

Задача для самостоятельного решения:

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$

Ответ: $(-3;\pm1),(3;\pm1),(-1;\pm3),(1;\pm3)$.

7 Комбинирование различных методов

В некоторых случаях приходится комбинировать различные методы решения системы.

Пример 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2-4x-2y=1, \\ y^2-2x+6y=-14. \end{cases}$

Решение.

Выделим полный квадрат в каждом уравнении системы:

$$\text{а) } (x^2-4x+4)-4-2y=1,$$

$$(x-2)^2-2y=5.$$

$$\text{б) } (y^2+6y+9)-9-2x=-14,$$

$$(y+3)^2-2x=-5.$$

Сложим получившиеся *уравнения*:

$$(x-2)^2-2y+(y+3)^2-2x=-5+5,$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2-2(x+y)=0.$$

Введем *замену переменных*:

$$\begin{cases} a=x-2, \\ b=y+3. \end{cases}$$

Тогда $x=a+2,\ y=b-3$. Отсюда $x+y=a+b-1$.

Придем к уравнению

$$a^2+b^2-2(a+b-1)=0\,,$$

а после перегруппировки

$$(a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=1. \end{cases}$$

Произведем *обратную замену*:

$$\begin{cases} x-2=1, \\ y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=-2. \end{cases}$$

Ответ: $(3;-2)$.