

Занятие 1.4 Представление рациональных функций в виде суммы элементарных дробей.

Определение

Рациональная функция – это отношение двух полиномов.

- Рациональная функция называется *правильной*, если степень полинома, стоящего в числителе строго меньше степени полинома, стоящего в знаменателе.
- Рациональная функция называется *неправильной*, если степень полинома, стоящего в числителе больше или равна степени полинома, стоящего в знаменателе.

Примеры

1. Правильные рациональные функции:

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x^3 - x + 1}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 9)^4}$$

2. Неправильные рациональные функции:

$$h(x) = \frac{3x^2 - x + 10}{(x + 1)^2}, \quad j(x) = \frac{x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 1}{x + 3}$$

Определение

Простейшими рациональными дробями называются дроби следующих четырех типов:

- I тип: $\frac{A}{px + q}$
- II тип: $\frac{A}{(px + q)^k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$
- III тип: $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$, $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$
- IV тип: $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$, $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$

A, B, a, b, c, p, q – вещественные числа.

Правильные рациональные функции

Теорема

Любую **правильную** рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$, у которой

$$Q(x) = (x + a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x + a_i)^{k_i} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_jx + q_j)^{n_j}$$

можно представить в виде суммы простейших дробей по правилу:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x + a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x + a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{i1}}{x + a_i} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x + a_i)^{k_i}} + \\ & + \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{C_{1n_1}x + D_{1n_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}} + \dots + \frac{C_{j1}x + D_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \dots + \frac{C_{jn_j}x + D_{jn_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{n_j}} \end{aligned}$$

$A_{11}, \dots, A_{ik_i}, C_{11}, \dots, C_{jn_j}, D_{11}, \dots, D_{jn_j}$ – числа, которые определяются методом **неопределенных коэффициентов** или методом **частных значений**.



Число простейших дробей равно числу всех простейших множителей в знаменателе; число неопределенных коэффициентов равно степени многочлена в знаменателе $Q(x)$.

Примеры

1. Разложим рациональную функцию $\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$ на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x - 3} = \\ &= \frac{A_1(x - 2)(x - 3) + A_2(x - 1)(x - 3) + A_3(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \end{aligned} \quad (1)$$

У первой и последней дробей знаменатели одинаковые, следовательно, числители должны быть равны:

$$x^2 + 1 = A_1(x - 2)(x - 3) + A_2(x - 1)(x - 3) + A_3(x - 1)(x - 2) \quad (2)$$

Для нахождения чисел A_1, A_2, A_3 воспользуемся **методом частных значений**. Для того, чтобы найти A_1 , в правой части формулы (2) нужно избавиться от второго и третьего слагаемых; этого можно добиться, подставив в правую и левую части формулы (2) $x = 1$:

$$1^2 + 1 = A_1(1 - 2)(1 - 3) + A_2 \cdot 0 + A_3 \cdot 0 \implies 2 = A_1 \cdot 2 \implies A_1 = 1$$

Для того, чтобы найти A_2 , подставим в правую и левую части формулы (2) $x = 2$ и найдем, что $A_2 = -5$; после подстановки $x = 3$ мы обнаружим, что $A_3 = 5$. Подставляя найденные значения A_1, A_2, A_3 в (1), получим:

$$\boxed{\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{5}{x - 2} + \frac{5}{x - 3}} \quad (3)$$

2. Разложим рациональную функцию $\frac{x}{(x+1)^2(x+2)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)} \quad (4)$$

Сократим знаменатели первой и последней дробей и приравняем числители:

$$x = A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2 \quad (5)$$

Воспользуемся **методом неопределенных коэффициентов**. Для этого в правой части равенства (5) раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями (приведем подобные слагаемые):

$$x = (A+C)x^2 + (3A+B+2C)x + 2A+2B+C \quad (6)$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (6); отсутствие x^2 в левой части этого равенства говорит о том, что коэффициент перед x^2 равен нулю. Получаем систему уравнений и решаем ее:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B+2C=1 \\ 2A+2B+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-A \\ 3A+B-2A=1 \\ 2A+2B-A=0 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-1 \\ A=2 \\ C=-2 \end{cases}$$

Подставим найденные значения A, B, C в (4):

$$\boxed{\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2}} \quad (7)$$

3. Разложим рациональную функцию $\frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2) + (Mx+N)x}{x(x^2+2x+2)} \quad (8)$$

Приравняем числители:

$$x^2+10x-10 = A(x^2+2x+2) + (Mx+N)x$$

В правой части раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x^2+10x-10 = (A+M)x^2 + (2A+N)x + 2A$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и решим получившуюся систему уравнений:

$$\begin{cases} A+M=1 \\ 2A+N=10 \\ 2A=-10 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-5 \\ M=6 \\ N=20 \end{cases}$$

Подставим найденные числа A, M, N в (8):

$$\boxed{\frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)} = -\frac{5}{x} + \frac{6x+20}{x^2+2x+2}} \quad (9)$$

Неправильные рациональные функции

Для того, чтобы неправильную рациональную функцию разложить на сумму простейших дробей, сначала необходимо представить ее в виде суммы обычного полинома и правильной рациональной функции. Этому можно добиться, разделив полином, находящийся в числителе на полином из знаменателя. Приведем примеры процедуры деления полиномов.

Примеры

1. Разделить полином $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ на полином $B(x) = x^2 - 3x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 \quad | \quad x^2 - 3x + 1 \\
 - \quad 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 0 \quad | \quad 2x^2 + 3x + 9 \\
 \hline
 \quad 3x^3 + 0 - 7x + 5 \quad | \quad \\
 - \quad 3x^3 - 9x^2 + 3x \quad | \quad \\
 \hline
 \quad \quad 9x^2 - 10x + 5 \quad | \quad \\
 - \quad \quad 9x^2 - 27x + 9 \quad | \quad \\
 \hline
 \quad \quad \quad 17x - 4 \quad | \quad
 \end{array}$$

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 3x + 1} = \underbrace{2x^2 + 3x + 9}_{Q(x)} + \frac{\overbrace{17x - 4}^{R(x)}}{\underbrace{x^2 - 3x + 1}_{B(x)}}$$

2. Разделить полином $A(x) = x^5 - 7x^3 - 12x + 18$ на полином $B(x) = x^3 - 2x^2 - 6$.

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 0 - 7x^3 + 0 - 12x + 18 \quad | \quad x^3 - 2x^2 + 0x - 6 \\
 - \quad x^5 - 2x^4 + 0 - 6x^2 \quad | \quad x^2 + 2x - 3 \\
 \hline
 \quad 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 12x + 18 \quad | \quad \\
 - \quad 2x^4 - 4x^3 + 0 - 12x \quad | \quad \\
 \hline
 \quad \quad 3x^3 + 6x^2 + 0 + 18 \quad | \quad \\
 - \quad \quad 3x^3 + 6x^2 + 0 + 18 \quad | \quad \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0 \quad | \quad
 \end{array}$$

$$\frac{x^5 - 7x^3 - 12x + 18}{x^3 - 2x^2 - 6} = x^2 + 2x - 3$$

Пример

Представим функцию $\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6}$ в виде суммы полинома и простейших дробей. Так как степень полинома в числителе больше степени полинома в знаменателе, необходимо разделить полином $x^3 + x^2 + 3x + 4$ на полином $x^2 + x - 6$:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + x^2 + 3x + 4 \quad | \quad x^2 + x - 6 \\
 - \quad x^3 + x^2 - 6x \quad | \quad \\
 \hline
 \quad \quad 9x + 4 \quad | \quad
 \end{array}$$

Получаем:

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6} = x + \frac{9x + 4}{x^2 + x - 6}$$

Разложим на множители полином $x^2 + x - 6$ по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \iff x_1 = 2, \quad x_2 = -3 \implies x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) \implies \frac{9x + 4}{x^2 + x - 6} = \frac{9x + 4}{(x - 2)(x + 3)}$$

Разложим функцию $\frac{9x + 4}{(x - 2)(x + 3)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{9x + 4}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3} \iff \frac{9x + 4}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)} \iff 9x + 4 = A(x + 3) + B(x - 2)$$

Воспользуемся методом частных значений.

$$x + 3 = 0 \iff x = -3 \implies 9 \cdot (-3) + 4 = A(-3 + 3) + B(-3 - 2) \iff -23 = -5B \iff B = \frac{23}{5}$$

$$x - 2 = 0 \iff x = 2 \implies 9 \cdot 2 + 4 = A(2 + 3) + B(2 - 2) \iff 22 = 5A \iff A = \frac{22}{5}$$

Тогда

$$\frac{9x + 4}{x^2 + x - 6} = \frac{22/5}{x - 2} + \frac{23/5}{x + 3}$$

Ответ: $\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6} = x + \frac{22/5}{x - 2} + \frac{23/5}{x + 3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Разложите на сумму простейших дробей

1. $\frac{2x + 5}{x^2 - 9x + 20}$

4. $\frac{x^2 + 10x + 24}{(x - 2)^2(x + 1)}$

2. $\frac{3x + 10}{(x - 1)(x + 2)(x + 4)}$

5. $\frac{x + 15}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$

3. $\frac{x^3}{x^2 - 9x + 20}$

6. $\frac{4x^2 + 2}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}$