

## Занятие 2.2

## Окружность, сфера

## 1 Окружность, ее каноническое уравнение

*Определение.* **Окружностью** называется плоская кривая, состоящая из множества всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой **центром**, на некоторое расстояние  $R$ , называемое **радиусом**.

*Определение.* Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Центр, радиус и диаметр окружности являются также центром, радиусом и диаметром круга.

Рассмотрим окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$ . Тогда по определению окружности для любой точки  $M(x, y)$ , принадлежащей ей, выполняется равенство  $M_0M = |\overrightarrow{M_0M}| = R$ .

Вспользуемся формулой вычисления длины вектора:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}. \quad (1)$$

*Определение.* Уравнение (1) называется **каноническим уравнением окружности** с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и радиусом  $R$  (рис. 1).

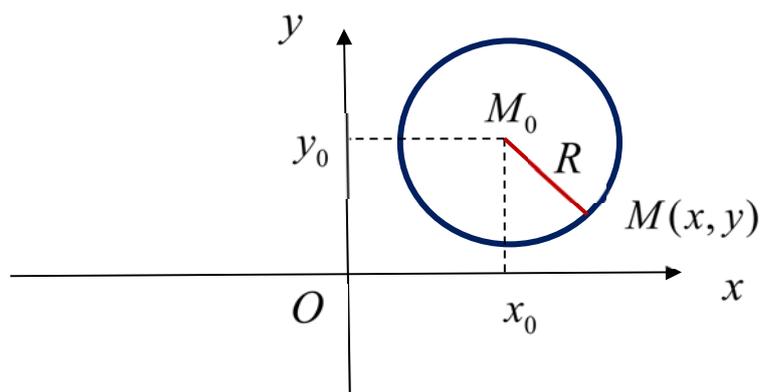


Рис. 1.

В частности, уравнение окружности с центром в начале координат и радиуса  $R$  есть

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}. \quad (2)$$

**Задача 1.** Найдите координаты центра и радиус окружности:

**а)**  $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 36$ .

**б)**  $(x + 1)^2 + y^2 = 7$ .

**Ответ:** **а)**  $M_0(5; -3), R = 6$ , **б)**  $M_0(-1; 0), R = \sqrt{7}$ .

**Задача 2.** Составьте уравнение окружности, если:

**а)**  $M_0(0; 5)$  – центр окружности,  $R = 3$ .

**б)**  $M_0(-3; -7)$  – центр окружности,  $R = \frac{1}{2}$ .

**Ответ:** **а)**  $x^2 + (y - 5)^2 = 9$ , **б)**  $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = \frac{1}{4}$ .

**Задача 3.** Найдите координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 29 = 0.$$

**Решение.** Воспользуемся **процедурой выделения полного квадрата** – такого тождественного преобразования, при котором квадратный трехчлен представляется в виде  $(a \pm b)^2 + c$  – суммы или разности квадрата двучлена и

некоторого числового или буквенного выражения.

Метод выделения полного квадрата основан на использовании формул сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{полный квадрат}}$$

$$(a - b)^2 = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{полный квадрат}}$$

Выделим полные квадраты в выражениях, содержащих одну и ту же переменную.

1) Рассмотрим выражение  $x^2 + 8x$ .

$$(a + b)^2 = \overset{x^2 + 8x}{a^2 + 2ab + b^2}$$

Легко заметить, что в нашем выражении в качестве  $a$  выступает  $x$ . Значит  $8x$  должно быть удвоенным произведением. Найдем  $b$ . Для этого представим  $8x$  в виде произведения:

$$(a + b)^2 = a^2 + \overset{x^2 + 2x \cdot 4}{2ab} + b^2$$

Не трудно заметить, что  $b = 4$ . Для полного квадрата нам не хватает  $b^2$ , значит нам не хватает 16. Добавим. А чтобы выражение не изменилось вычтем 16. Фактически ничего не изменилось. Только форма. И благодаря этому, мы можем записать первые три слагаемых как квадрат суммы.

$$x^2 + 8x = (x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2) - 4^2 = (x + 4)^2 - 16.$$

2) Рассмотрим выражение  $y^2 - 4y$  и проведем аналогичную процедуру выделения полного квадрата:

$$y^2 - 4y = (y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 4) - 4 = (y - 2)^2 - 4.$$

Тогда уравнение окружности  $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 29 = 0$  принимает вид:

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 - 29 = 0$$

или

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 49.$$

Согласно формуле (1), центр окружности находится с в точке  $(-4, 2)$  и радиус

$$R = \sqrt{49} = 7.$$

### **Задачи для самостоятельного решения:**

1. Постройте окружности:

а)  $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$ ,

б)  $x^2 + y^2 + x - 2 = 0$ ,

в)  $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$ .

**Ответ:** а)  $M_0(5; 3), R = 6$ , б)  $M_0(-0,5; 0), R = 1,5$ , в)  $M_0(1; 2/3), R = \sqrt{\frac{10}{3}}$ .

2. Найдите точки пересечения окружности  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$  и прямой  $y = x - 3$ .

**Ответ:**  $(4; 1), (-2; -5)$ .

## 2 Сфера, ее каноническое уравнение

**Определение.** **Сферой** называется поверхность, состоящая из множества всех точек пространства, равноудаленных от заданной точки, называемой **центром**, на некоторое расстояние  $R$ , называемое **радиусом**.

Другим определением сферы может служить следующее:

**Сфера** – тело, полученное в результате вращения полуокружности вокруг ее диаметра.

**Определение.** Часть пространства, ограниченная сферой, называется **шаром**.

Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

**Каноническое уравнение сферы** с центром в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и радиуса  $R$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2} \quad (3)$$

получается из определения сферы аналогично уравнению окружности.

На рисунке 2 показана сфера с центром в начале координат. Ее уравнение

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}. \quad (4)$$

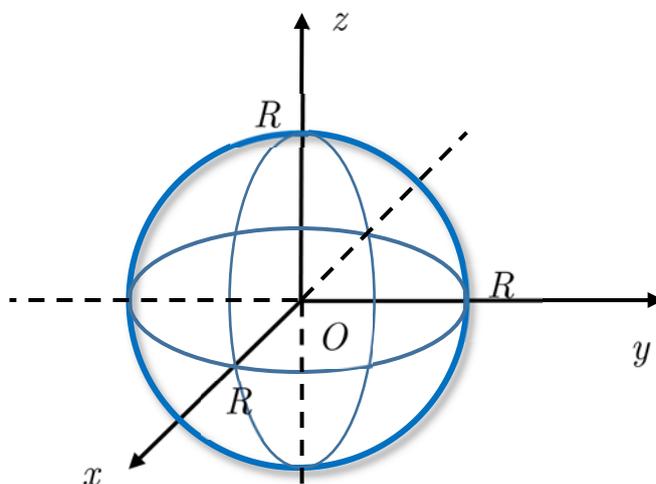


Рис. 2.

### Как изобразить сферу?

1. Отметить центр сферы (точку  $O$ ).
2. Начертить окружность с центром в точке  $O$ .
3. Изобразить видимую вертикальную дугу (меридиан).
4. Изобразить невидимую вертикальную дугу.
5. Изобразить видимую горизонтальную дугу (параллель).
6. Изобразить невидимую горизонтальную дугу.
7. Провести радиус сферы.

### Задачи для самостоятельного решения:

В данных уравнениях найдите координаты центра и радиус сферы:

1.  $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9.$

2.  $(x - 6)^2 + (y + 0,5)^2 + z^2 = 5.$

3.  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0.$

**Ответ:** 1.  $M_0(2; -4; 7), R = 3$ , 2.  $M_0(6, -0,5; 0), R = \sqrt{5}$ ,

3.  $M_0(1,5; 2,5; 2), R = \frac{5}{\sqrt{2}}.$