

Занятие 2.1

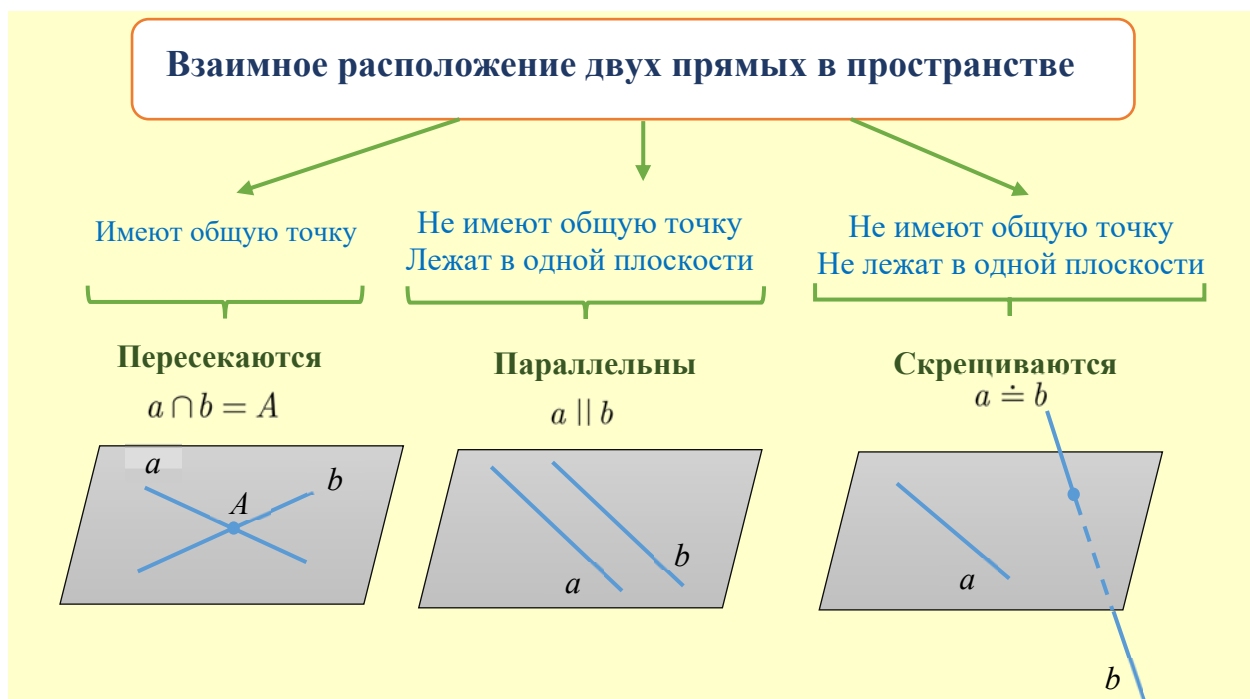
Прямые и плоскости. Векторно-координатный метод

Векторно-координатный – весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов (между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями) или расстояний (от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми) в пространстве.

Решая ту или иную математическую или физическую задачи векторно-координатным методом, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

Данный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении необходимых векторов (их длин и углов между ними). Рассмотрим векторно-координатный метод при исследовании взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

1 Взаимное расположение двух прямых в пространстве



Определение. Угол между параллельными прямыми (или прямыми, которые совпадают) считают равным 0° .

Определение. Угол между пересекающимися прямыми – меньший из углов, образующихся при пересечении прямых.

Определение. Угол между скрещивающимися прямыми – угол между прямыми, которые пересекаются и которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Данный угол между двумя прямыми векторно-координатным методом определяется, как угол между их направляющими векторами (векторами, лежащими на прямых, или им параллельных).

Алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми:

1. Ввести систему координат и вписать в нее данную фигуру.
2. Выбрать на каждой прямой по две точки и найти координаты их направляющих векторов $\vec{s}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{s}_2 = (x_2; y_2; z_2)$.
3. Вычислить искомый угол φ по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

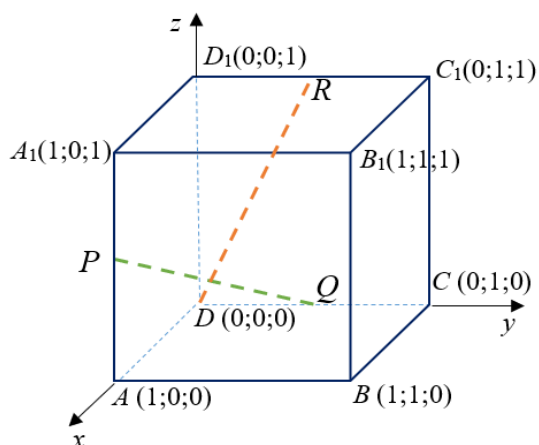
Пример 1. На ребрах AA_1 , CD и C_1D_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки P , Q , R – середины этих ребер. Найдите угол, который образует прямая PQ с прямой DR .

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, P , Q , R – середины ребер AA_1 , CD и C_1D_1 соответственно.

Найти: угол между прямыми PQ и DR .

Решение.

- 1) Расположим систему координат так, что точка D – начало координат. Пусть ось x проходит через ребро AD , ось y – через ребро DC , ось z – через ребро DD_1 .
- 2) Если длина ребра куба не дана, то ее можно принять равной 1. На чертеже показаны координаты вершин куба в выбранной системе



координат. Точки P , Q , R – середины ребер AA_1 , CD и C_1D_1 , следовательно, их координаты $P(1;0;1/2)$, $Q(0;1/2;0)$, $R(0;1/2;1)$. Запишем координаты векторов:

$$\overrightarrow{PQ} = \left(0 - 1; 1 - 0; 0 - \frac{1}{2} \right) = \left(-1; 1; -\frac{1}{2} \right),$$

$$\overrightarrow{DR} = \left(0 - 0; \frac{1}{2} - 0; 1 - 0 \right) = \left(0; \frac{1}{2}; 1 \right).$$

3) Найдем угол между векторами \overrightarrow{PQ} и \overrightarrow{DR} . Вычислим длины векторов и их скалярное произведение:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1/2)^2} = \sqrt{9/4} = 3/2,$$

$$|\overrightarrow{DR}| = \sqrt{0^2 + (1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{5/4} = \sqrt{5}/2,$$

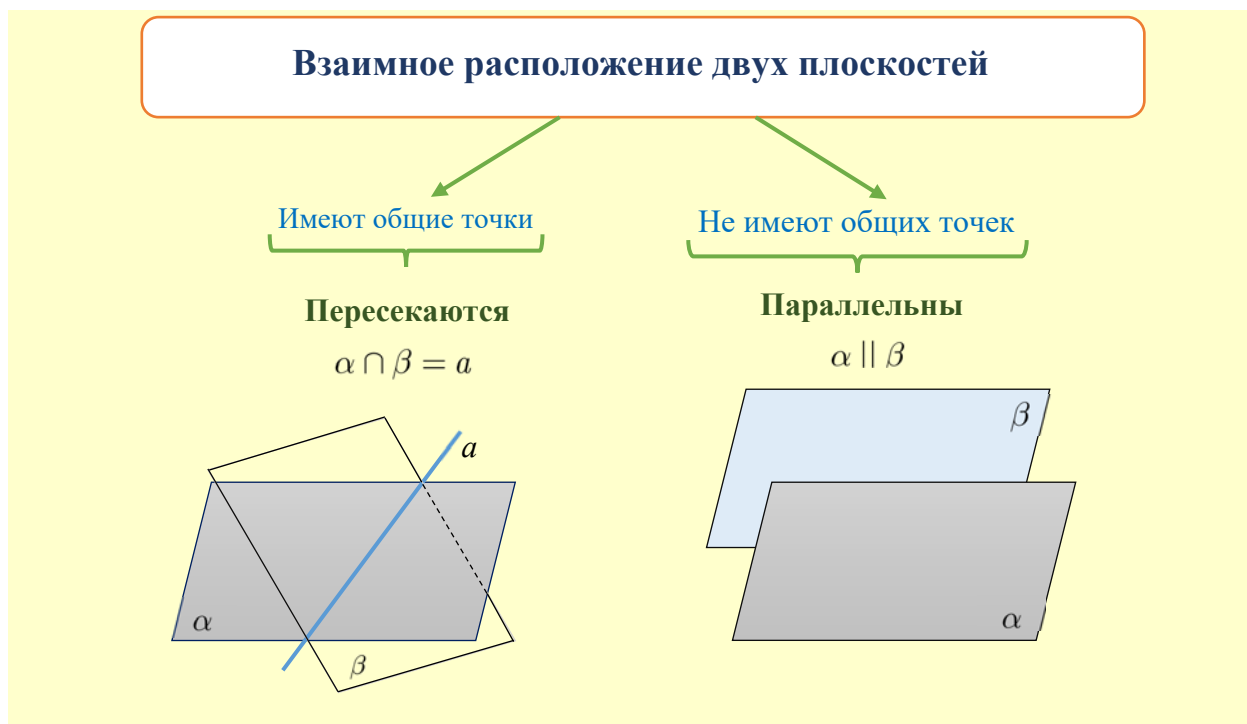
$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DR} = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1/2 + (-1/2) \cdot 1 = 0.$$

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DR}|}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{DR}|} = \frac{0}{3/2 \cdot \sqrt{5}/2} = 0.$$

Следовательно, векторы \overrightarrow{PQ} и \overrightarrow{DR} , а также и прямые PQ и DR перпендикулярны.

Ответ: 90° .

2 Взаимное расположение двух плоскостей



Определение. Угол между параллельными или совпадающими плоскостями считают равным 0° .

Определение. Угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям (рис. 1).

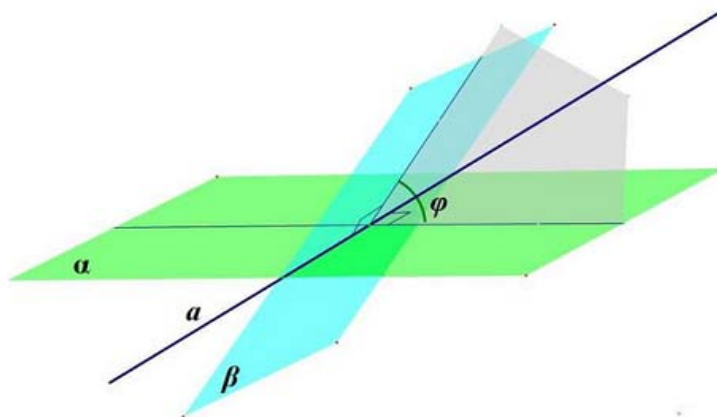


Рис. 1. Угол между плоскостями.

При использовании векторно-координатного метода в качестве угла между плоскостями выбирают угол между векторами, перпендикулярными данным плоскостям. Их называют *нормальными векторами* или *векторами нормали*. Если плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$, то вектор нормали имеет координаты $\vec{n} = (a; b; c)$.

Алгоритм нахождения угла между плоскостями:

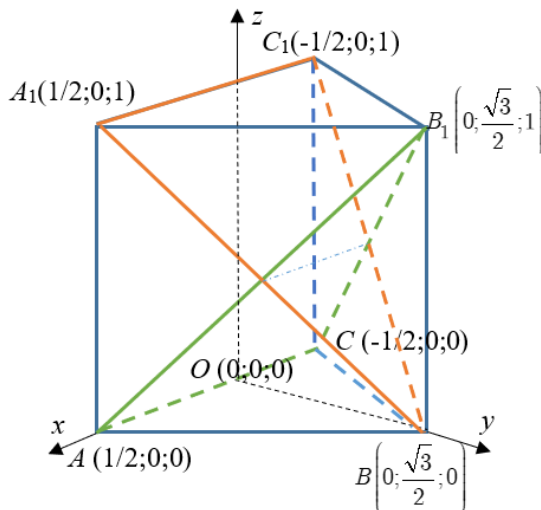
© Меньшова И.В., 2020

1. Ввести систему координат и вписать в нее данную фигуру.
2. Найти векторы $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$, перпендикулярные к данным плоскостям (векторы нормали).
3. Вычислить угол по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Пример 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между плоскостями (ACB_1) и (BA_1C_1) .

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, P, Q, R – середины ребер



$AB=AA_1=1$.

Найти: косинус угла между плоскостями (ACB_1) и (BA_1C_1) .

Решение.

1) Введем декартову систему координат так, что точка O – начало координат – основание высоты (биссектрисы и медианы) OB равностороннего треугольника ABC .

Пусть ось x проходит через ребро AC , ось y – через высоту OB .

- 2) Координаты вершин призмы показаны на чертеже. Пусть $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ – вектор нормали плоскости (ACB_1) . Этот вектор перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 0)$ и $\overrightarrow{AB_1} = \left(-1/2; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$, лежащим в плоскости (ACB_1) . Следовательно, скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}_1 = 0$ и $\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n}_1 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} -1 \cdot a_1 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot c_1 = 0, \\ -\frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b_1 + 1 \cdot c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0, \\ c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} b_1. \end{cases}$$

Пусть $b_1 = 2$, тогда $c_1 = -\sqrt{3}$ и $\vec{n}_1 = (0; 2; -\sqrt{3})$.

Аналогично найдем координаты вектора нормали $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ плоскости (BA_1C_1) , который будет перпендикулярен векторам $\overrightarrow{A_1B} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right)$ и $\overrightarrow{A_1C_1} = (-1; 0; 0)$. Имеем

$$\begin{cases} -1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot c_2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \cdot a_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b_2 - 1 \cdot c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0, \\ c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} b_2. \end{cases}$$

Отсюда $\vec{n}_2 = (0; 2; \sqrt{3})$.

3) Найдем угол между векторами \vec{n}_1 и \vec{n}_2 . Вычислим длины векторов и их

скалярное произведение:

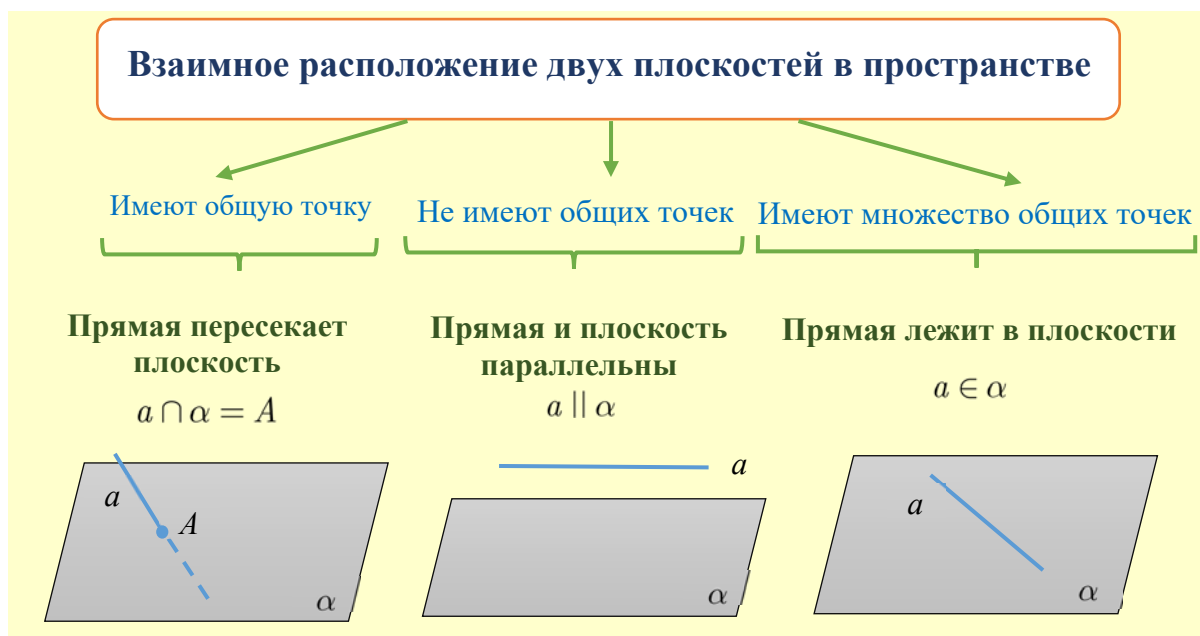
$$|\vec{n}_1| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -1.$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: 1/7.

3 Взаимное расположение прямой и плоскости



Определение. Прямая, перпендикулярная плоскости, – прямая, перпендикулярная какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Определение. Угол между прямой и плоскостью, параллельной прямой или содержащей эту прямую, считаю равным 0° .

Определение. Угол между плоскостью и прямой, пересекающей плоскость, – угол между прямой и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость (рис. 2).

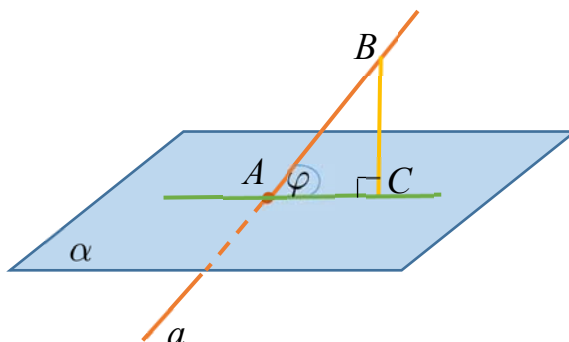


Рис. 2. Угол между прямой и плоскостью.

Угол между прямой и плоскостью векторно-координатным методом определяется, как угол между направляющим вектором прямой и вектором нормали плоскости.

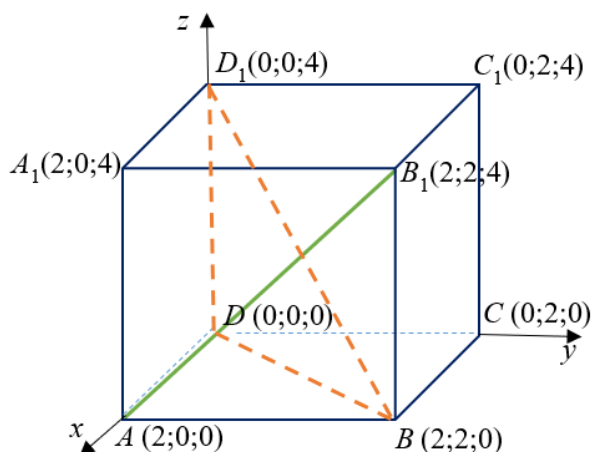
Алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью:

1. Ввести систему координат и вписать в нее данную фигуру.
2. Выбрать на прямой две точки и найти координаты направляющего вектора $\vec{s} = (x; y; z)$. Затем найти координаты вектора нормали плоскости $\vec{n} = (a; b; c)$.
3. Вычислить искомый угол φ по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|ax + by + cz|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пример 3. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра равны 4, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная четырехугольная призма, $AB=2$, $AA_1=4$.



Найти: угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .

Решение. 1) Расположим систему координат так, что точка D – начало координат. Пусть ось x проходит через ребро AD , ось y – через ребро DC , ось z – через ребро DD_1 .

На чертеже показаны координаты вершин куба в выбранной системе

координат. Вычислим координаты направляющего вектора прямой AB_1

$$\overrightarrow{AB_1} = (2 - 2; 2 - 0; 4 - 0) = (0; 2; 4).$$

Найдем координаты вектора нормали $\vec{n} = (a; b; c)$ плоскости (BDD_1) . Этот вектор будет перпендикулярен векторам $\overrightarrow{DB} = (2; 2; 0)$ и $\overrightarrow{DD_1} = (0; 0; 4)$.

Имеем

$$\begin{cases} 2a + 2b + 0 \cdot c = 0, \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a, \\ c = 0. \end{cases}$$

Пусть $a = 1$, тогда $\vec{n} = (1; -1; 0)$.

2) Найдем синус угла между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и \vec{n} .

$$|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = -2.$$

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми $A_1 C$ и DE , если E – середина ребра CC_1 .

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$.

2. В правильной треугольной призме все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

Ответ: $\arccos \frac{1}{4}$.

3. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями ACD_1 и BDC_1 .

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

4. Ребро основания правильной шестиугольной призмы равно 1, а боковое ребро – 2. Найдите угол между плоскостями $BA_1 D_1$ и $AA_1 E_1$.

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{12}{19}}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ S – вершина, ребро основания равно 4, а высота – 6. Найдите угол между прямой BE , где E – середина SC и плоскостью ADS .

Ответ: $\arcsin \frac{6}{\sqrt{190}}$.