Занятие 1.4

Призма и пирамида (объем)

Определение. **Призмой** называют многогранник, две грани которого – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы.

Частными случаями четырехугольной призмы являются параллелепипед (в основании лежит параллелограмм, все шесть граней – параллелограммы), прямоугольный параллелепипед (все шесть граней – прямоугольники) и куб – прямоугольный параллелепипед с равными измерениями. Все шесть граней куба – равные квадраты.

Определение. **Пирамида** – многогранник, одна грань которого – произвольный многоугольник, а все остальные – треугольники, имеющие общую вершину.

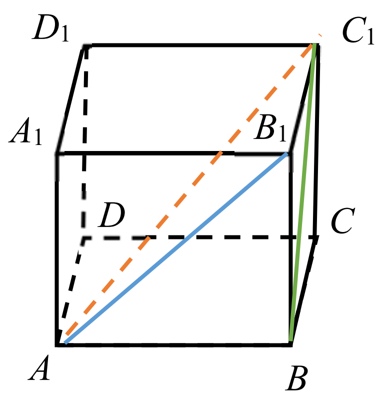
Определение. Если в основании многогранника лежит правильный многоугольник, то многогранник называется **правильным**.

Многогранники				
Название	**Призма**	**Параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
Формула для вычисления объема	$V = S_{осн.} \cdot h$	$V = abc$	$V = a^3$	$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$
Формула для вычисления высоты или стороны многогранника	$h = \frac{V}{S_{осн.}}$	$c = \frac{V}{ab}$	$a = \sqrt[3]{V}$	$h = \frac{3V}{S_{осн.}}$

a, b, c – стороны многогранника, *h* – высота многогранника, $S_{осн.}$ – площадь основания многогранника, *V* – объем многогранника.

Пример 1. Диагональ прямоугольного параллелепида равна 13 см, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$ см. Найти объем параллелепипеда.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепид, AC_1=13 см, AB_1= $4\sqrt{10}$ см, BC_1=$3\sqrt{17}$ см.



Найти: $V_{пар}$.

Решение.

1. $V = abc$. Обозначим $AB=a$, $BC=b$, $BB_1=c$.

2. Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ABB_1, BCC_1 и AB_1C_1.

$\triangle ABB_1$: $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$. Тогда $a^2 + c^2 = 160$.

$\triangle BCC_1$: $BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2$. То есть $b^2 + c^2 = 153$.

$\triangle AB_1C_1$: $AC_1^2 = AB_1^2 + B_1C_1^2$. Тогда $a^2 + c^2 + b^2 = 169$.

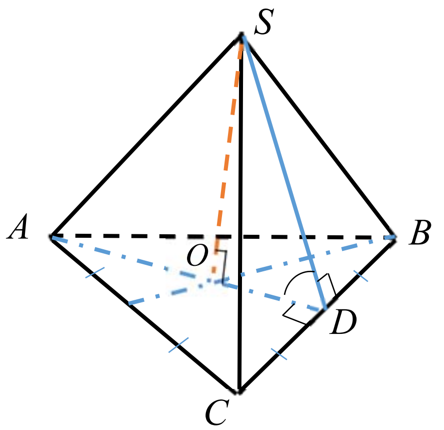
Объедним все в систему и решим ее.

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 160, \\ b^2 + c^2 = 153, \\ a^2 + c^2 + b^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16, \\ b^2 = 9, \\ c^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4, \\ b = 3, \\ c = 12. \end{cases}$$

3. $V = abc = 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144$ см^3.

Ответ: 144 см^3.

Пример 2. Объем правильной треугольной пирамиды $9\sqrt{3}$, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти длину высоты пирамиды.



Дано: $SABC$ – правильная пирамида, $V = 9\sqrt{3}$.

Найти: h – высоту пирамиды.

Решение.

1. Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$, тогда $h = \dfrac{3V}{S_{осн.}}$. Так как пирамида правильная, то в основании лежит правильный треугольник, площадь которого может быть вычислена по формуле $S = a^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, где a – сторона треугольника ABC. Находим
$$h = \frac{27\sqrt{3}}{a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{108}{a^2}.$$
2. Угол между боковой гранью и плоскостью основания – двугранный угол, равный линейному углу ADS, образованному высотами AD и DS, соответственно, равностороннего треугольника ABC, лежащего в основании, и равнобедренного треугольника CSB, лежащего в боковой гране пирамиды. $\angle ADS = 60^{\circ}$.
3. Точка O – точка пересечения высот, биссектрис и медиан равностороннего треугольника ABC – основание высоты пирамиды. Следовательно, $OD = \dfrac{1}{3} AD$ (по свойству медианы треугольника).
4. Высота треугольника ABC может быть найдена из прямоугольного треугольника ACD по теореме Пифагора: $AD = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $OD = \dfrac{1}{3} AD = a\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
5. Из прямоугольного треугольника SOD:

$$SO = OD \cdot \operatorname{tg} \angle ODS = a\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = a\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2} = h \cdot$$

Тогда

$$\frac{a}{2} = \frac{108}{a^2} \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = 6 \text{ и } h = 3.$$

Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.

Ответ: 120.

2. Основанием параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 1,5.

3. Объём куба равен 12. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

Ответ: 1,5.

4. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 8.

Ответ: 16.

5. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.

Ответ: 4.

6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

Ответ: 16.

7. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

Ответ: 13.

8. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 12.

Задачи для домашнего решения

1. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна $\sqrt{194}$ см, а диагональ ее боковой грани 13 см. Найти объем призмы.

Ответ: 300 см^3.

2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.

Ответ: 4.

3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.

Ответ: 4.

4. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 2. Найдите объём куба.

Ответ: 16.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 5. Найдите длину отрезка OS.

Ответ: 7,5.

6. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.

Ответ: 7.

7. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 48.