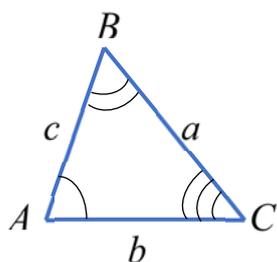


Занятие 1.3

Треугольник, параллелограмм

1 Соотношения между сторонами и углами треугольника

1.1 Произвольный треугольник



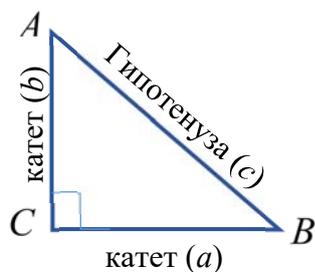
Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Длины сторон треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Квадрат длины любой стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними

1.2 Прямоугольный треугольник



$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

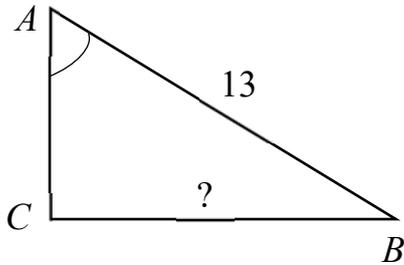
$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

Пример 1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB=13$, $\cos A = \frac{12}{13}$.

Найдите BC .

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle C=90^\circ$, $AB=13$, $\cos A = \frac{12}{13}$.



Найти: BC .

Решение.

1. $\cos A = \frac{AC}{AB}$. Отсюда

$$AC = AB \cdot \cos A = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12.$$

2. По теореме Пифагора

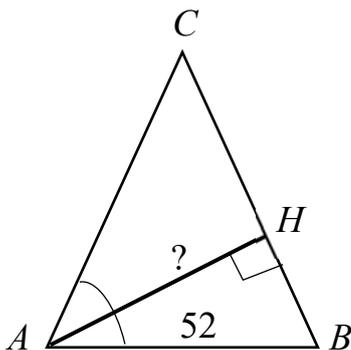
$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 2. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=52$, $\cos A = \frac{3\sqrt{11}}{10}$. Найдите

высоту AH .

Дано: $\triangle ABC$, $AC=BC$, $AB=52$, $\cos \angle CAB = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, AH – высота.



Найти: AH .

Решение.

1. $\triangle ABC$ – равнобедренный, т.к. $AC=BC$.

Следовательно,

$$\angle CAB = \angle CBA = \angle ABH.$$

2. Из $\triangle AHB$

$$\sin \angle HBA = \frac{AH}{AB}. \text{ Отсюда}$$

$$AH = AB \cdot \sin \angle ABH.$$

2. Воспользуемся основным

тригонометрическим тождеством:

$$\sin \angle ABH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABH} = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \sqrt{1 - \frac{99}{100}} = 0,1.$$

Отсюда $AH = 52 \cdot 0,1 = 5,2$.

Ответ: 5,2.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .

Ответ: 8.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 2$, $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC .

Ответ: 0,5.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{3}}$, $AC = 4$. Найдите AB .

Ответ: 7.

4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $AB=13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$.

Найдите AH .

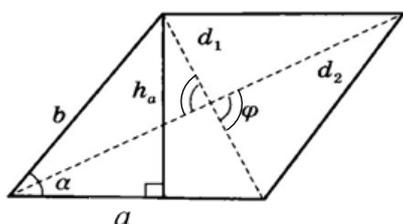
Ответ: 12,5.

5. В треугольнике ABC $AC=BC$, высота $CH=10$, $AB=15$. Найдите $\cos A$.

Ответ: 0,6.

2 Вычисление площадей параллелограмма и треугольника

2.1 Площадь параллелограмма



$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = d_1 d_2 \sin \varphi$$

$$S = ah_a \Rightarrow h_a = \frac{S}{a}$$

a, b – стороны параллелограмма,

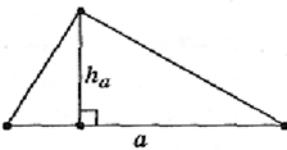
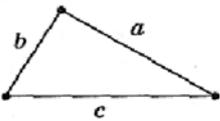
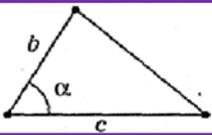
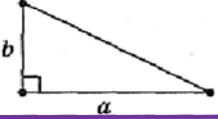
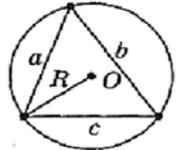
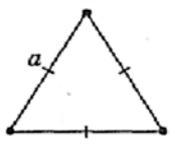
α – угол между сторонами,

h_a – высота, проведенная к стороне a ,

d_1, d_2 – диагонали параллелограмма,

φ – угол между диагоналями

2.2 Площадь треугольника

$S = \frac{1}{2} a h_a$ 	 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ <p style="text-align: center;">$(p - \text{полупериметр})$</p>
$S = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$ 	$S = pr$ 
$S = \frac{1}{2} ab$ 	$S = \frac{abc}{4R}$ 
$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ 	

a, b, c – стороны треугольника,

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ – полупериметр,}$$

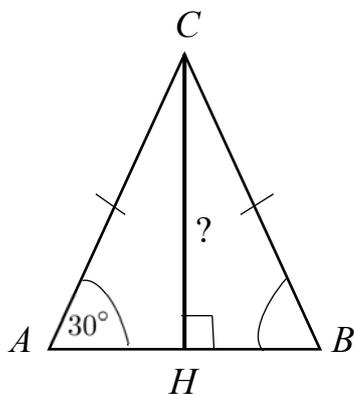
α – угол между сторонами,

h_a – высота, проведенная к стороне a ,

r – радиус вписанной окружности,

R – радиус описанной окружности

Пример 3. Площадь равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{3}$, а углы при основании 30° . Найдите высоту, опущенную на основание этого треугольника.



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный, $AC=BC$,
 $S_{ABC} = 4\sqrt{3}$, $\angle CAB = \angle CBA = 30^\circ$, CH –
 высота.

Найти: CH .

Решение.

1. Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный и $\angle CAB = \angle CBA$, то $AC=BC$. Следовательно, CH – высота, биссектриса и медиана. Тогда $AH=2AB$.

$$2. S_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AB \cdot CH = 8\sqrt{3}.$$

3. Из $\triangle AHC$ $\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC}$. Отсюда $CH = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AC$. И по теореме Пифагора $CH = \frac{1}{2} \sqrt{CH^2 + AH^2}$.

4. Обозначим $AH = x$, $CH = y$, тогда

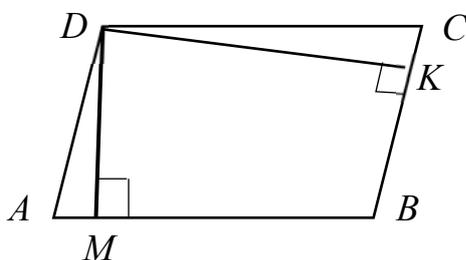
$$\begin{cases} 2xy = 8\sqrt{3}, \\ y = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 8\sqrt{3}, \\ 4y^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2xy = 8\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}y^2 = 8\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: 2.

Пример 4. Длины высот параллелограмма $h_1=3$, $h_2=5$, а его периметр $P=32$. Найдите площадь параллелограмма.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм, DM , DK – высоты, $DM=3$, $DK=5$, $P_{ABCD}=32$.

Найти: S_{ABCD} .

Решение.

1. $S_{ABCD} = AB \cdot DM = CB \cdot DK$. Тогда

$$3AB = 5CB. \text{ Следовательно, } AB = \frac{5}{3}CB$$

2. $P_{ABCD} = 2(AB + CB) = 32$. Отсюда $AB + CB = 16$. Тогда

$$\frac{5}{3}CB + CB = 16 \Leftrightarrow \frac{8}{3}CB = 16 \Leftrightarrow CB = 6.$$

3. $S_{ABCD} = CB \cdot DK = 6 \cdot 5 = 30$

Ответ: 30.

Задачи для самостоятельного решения

6. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

Ответ: 24.

7. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30° .

Ответ: 24.

8. В треугольнике ABC угол C равен 135° , $AC = 6$ дм, высота $BD=2$ дм.

Найдите площадь треугольника ABD .

Ответ: 8 дм².

9. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

Ответ: 6.

10. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, $AD = 21$, $\sin A = \frac{6}{7}$. Найдите большую

высоту параллелограмма.

Ответ: 18.

11. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

Ответ: 6.

Задачи для домашнего решения

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $AH=27$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$.

Найдите BH .

Ответ: 12.

2. Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.

Ответ: 6.

3. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при вершине 120° , а площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$.

Ответ: 6.

4. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

Ответ: 8.