Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 1

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = \mathrm{e}^x,\ y_2 = 3\,\mathrm{e}^x$

(b) $y_1(x) = \arcsin(x),\ y_2(x) = \arccos(x)$

2. Решить уравнение:

(a) $y''' = 4\cos^3(x) - x$

(b) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(c) $x^2 y'' + xy' = 4x + 1$

(d) $\begin{cases} yy'' + (y')^2 + 1 = 0 \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1 \end{cases}$

(e) $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^x - x$

(f) $\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 5\sin(5x) \\ y(0) = \dfrac{11}{10},\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(g) $4y'' + y = \dfrac{2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$\big(x^2 \ln^2(x)\big)y'' - \big(2x\ln(x)\big)y' + \big(\ln(x) + 2\big)y = 0, \quad y_1(x) = \ln(x)$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = 4x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 2.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = 2\,\mathrm{e}^{x^2},\ y_2(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{x^2}$

(b) $y_2(x) = \operatorname{arctg}(2x),\ y_3(x) = \operatorname{arcctg}(2x)$

2. Решить уравнение:

(a) $y^{IV} = \cos(2x)$

(b) $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1 \end{cases}$

(c) $xy'' = y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$

(d) $\begin{cases} yy'' + (y')^2 = (y')^3 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

(e) $2y'' - y' - y = \mathrm{e}^x + \sin(x)$

(f) $\begin{cases} 3y'' - 2y' = x^2 + \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}} \\ y(0) = \dfrac{3}{8},\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(g) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos^2(3x)}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$\operatorname{ctg}(x)y'' + 2y' + \big(2\operatorname{tg}(x) + \operatorname{ctg}(x)\big)y = 0, \quad y_1(x) = \cos(x)$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = x - 2y \\ y'(t) = 3x - 4y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 3.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = \cos(2x),\ y_2(x) = \sin(2x)$

(b) $y_1(x) = 100x^2,\ y_2(x) = \sqrt{133}x^2$

2. Решить уравнение:

(a) $y''' = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(b) $\begin{cases} 6y'' - 5y' + y = 0 \\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(c) $yy'' - (y')^2 + y^2y' = 0$

(d) $\begin{cases} xy'' = y' - 5 \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0 \end{cases}$

(e) $3y'' - 5y' - 2y = \mathrm{e}^{2x} + x^2$

(f) $\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 16\cos(4x) - 1 \\ y(0) = -\dfrac{1}{16},\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(g) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\,\mathrm{e}^{-2x}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x + y \\ y'(t) = x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 4.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = x^3,\ y_2(x) = \cos(3x)$

(b) $y_1(x) = 2\cos(3x),\ y_2(x) = 3\cos x - 4\cos^3 x$

2. Решить уравнение:

(a) $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$

(b) $\begin{cases} y'' + 5y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(c) $y^2 y'' - 2y(y')^2 + (y')^3 = 0$

(d) $\begin{cases} y'y''(1+x^2) = x(1+(y')^2) \\ y(1) = \dfrac{1}{2},\ y'(1) = 1 \end{cases}$

(e) $2y'' + 5y' - 3y = -\mathrm{e}^{-3x} + 6x^2 + x$

(f) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = -4\cos(2x) + 8x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$

(g) $y'' + 4y = \dfrac{3}{\sin(2x)}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$x^2 y'' - 2x^2 y' + \big(x^2 - 2\big)y = 0, \quad y_1(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - y \\ y'(t) = 3x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 5.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = 4\sin^3 x - 3\sin x,\ y_2(x) = \sin(3x)$

(b) $y_1(x) = \operatorname{tg} x,\ y_2(x) = \operatorname{ctg} x$

2. Решить уравнение:

(a) $y''' = x^2 + 3x - 1$

(b) $\begin{cases} 2y'' + y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(c) $x^2 y'' + xy' = 1$

(d) $\begin{cases} y^2 y'' - y'(y' - 1)^2 = 0 \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

(e) $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^{-4x} + \mathrm{e}^{4x}$

(f) $\begin{cases} y'' - 12y' + 36y = 18x^3 + 1 \\ y(0) = \dfrac{1}{12},\ y'(0) = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

(g) $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$x^2 y'' - 5xy' + 8y = 0, \quad y_1(x) = x^2$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - 2y \\ y'(t) = 2x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 6.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = \cos(x),\ y_2(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

2. Решить уравнение:

(a) $y'' = x + \sin x$

(b) $x^2 y'' = y'^2$

(c) $y^3 y'' = 1$

(d) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(2) = 1,\ y'(2) = -2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4y'' + 16y' + 15y = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}} \\ y(0) = 3,\ y'(0) = -5,5 \end{cases}$

(f) $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin(2x)$

(g) $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$x^2(x+1)y'' - 2y = 0, \quad y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x + y \\ y'(t) = x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 7.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}},\ y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$

(b) $y_1(x) = \sin x \cos x,\ y_2(x) = \sin(2x)$

2. Решить уравнение:

(a) $y'' = \operatorname{arctg} x$

(b) $2xy'y'' = y'^2 - 1$

(c) $y'^2 + 2yy'' = 0$

(d) $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,2 \end{cases}$

(f) $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x}$

(g) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{x}}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = 4x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 8.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = \pi(x-2)^2,\ y_2(x) = x^2 - 4x + 4$

(b) $y_1(x) = \sin^2(x),\ y_2(x) = \cos^2(x)$

2. Решить уравнение:

(a) $y'' = \ln x$

(b) $y'' = 2yy'$

(c) $y''(\mathrm{e}^x + 1) + y' = 0$

(d) $\begin{cases} y'' + 4y' + 29y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 15 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' - y' = 2(1-x) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(f) $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin(2x) + x)$

(g) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0, \quad y_1(x) = \operatorname{tg} x$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - 2y \\ y'(t) = 2x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 9.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = 10\,\mathrm{e}^{3x},\ y_2(x) = 2\,\mathrm{e}^{3x}$

(b) $y_1(x) = \mathrm{e}^{x},\ y_2(x) = 10\,\mathrm{e}^{3x}$

2. Решить уравнение:

(a) $y''' = \dfrac{1}{x}$

(b) $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$

(c) $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$

(d) $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' - 2y' = \mathrm{e}^{x}(x^2 + x - 3) \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

(f) $y'' + y = \sin x - 2\,\mathrm{e}^{-x}$

(g) $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$(\mathrm{e}^{x} + 1)y'' - 2y' - \mathrm{e}^{x}\, y = 0, \quad y_1(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = 4x - 2y \end{cases}$$

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 4

Домашнее задание

Линейные дифференциальные уравнения и системы

Вариант 10.

1. Выяснить, являются функции y_1, y_2 линейно зависимыми или независимыми (в той области, где обе функции определены):

(a) $y_1(x) = \dfrac{1}{x},\ y_2(x) = \ln x$

(b) $y_1(x) = \sqrt{x},\ y_2(x) = 10\sqrt{x}$

2. Решить уравнение:

(a) $y''' = \cos(2x)$

(b) $xy'' = y' + x\sin\left(\dfrac{y'}{x}\right)$

(c) $yy'' + y = y'^2$

(d) $\begin{cases} 3y'' + 7y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' + y + \sin(2x) = 0 \\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$

(f) $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - \mathrm{e}^{-2x}$

(g) $y'' + 2y' + y = 3\,\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x^2+1}$

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно частное решение $y_1(x)$:

$$y'' - y'\operatorname{tg} x + 2y = 0, \quad y_1(x) = \sin x$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = 4x - 2y \end{cases}$$