Занятие 3.4 Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

На этом занятии речь пойдет о нахождении интегралов в тех случаях, когда подынтегральная функция содержит квадратичные иррациональности. Квадратичной иррациональностью называют выражение вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$, где x – переменная, a, b, c – заданные числа. Для того чтобы с квадратичной иррациональностью было удобнее работать, выделим под знаком корня полный квадрат:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}$$

Обозначим: $\left|c - \frac{b^2}{4a}\right| = \alpha, \quad |a| = \beta$. После этого в зависимости от знаков чисел $c - \frac{b^2}{4a}$ и a мы получим одно из трех возможных выражений:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\alpha - \beta u^2} \text{ или } \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\alpha + \beta u^2} \text{ или } \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\beta u^2 - \alpha} \tag{1}$$

Обратите внимание: по определению $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Интегралы, содержащие квадратичные иррациональности (1), вычисляются с помощью тригонометрических подстановок. В приведенной ниже таблице перечислены основные тригонометрические подстановки и иррациональности, к которым они применяются.

Таблица 1: Тригонометрические подстановки

	Интеграл содержит	Используется подстановка
1	$\sqrt{\alpha - \beta u^2}$	$u = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin t$ или $u = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cos t$
2	$\sqrt{\alpha + \beta u^2}$	$u = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{tg} t$ или $u = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg} t$
3	$\sqrt{\beta u^2 - \alpha}$	$u = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}\sin t}$ или $u = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}\cos t}$

Примеры

1. $$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \left| \begin{array}{c} \text{Выделяем полный квадрат:} \\ x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2\cdot 1}\right)^2 + 1 - \frac{1^2}{4\cdot 1} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ x^2+x-1 = \left(x+\frac{1}{2\cdot 1}\right)^2 - 1 - \frac{1^2}{4\cdot 1} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} = \left| \begin{array}{c} \text{замена:} \\ t = x+\frac{1}{2},\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\left[t^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{используем формулу 3 из таблицы 1;} \\ \text{в нашем случае: } \beta = 1,\ \ \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}}{2\sin z} \Rightarrow dt = \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sin z}\right)' dz \Rightarrow dt = -\frac{\sqrt{5}\cos z}{2\sin^2(z)}dz \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{\sqrt{5}\cos z}{2\sin^2(z)}dz}{\left[\frac{5}{4\sin^2 z}+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\frac{5}{4\sin^2 z}-\frac{5}{4}}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{\sqrt{5}\cos z}{2\sin^2(z)}dz}{\left[\frac{5+3\sin^2 z}{4\sin^2 z}\right]\sqrt{\frac{5}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 z}-1\right)}} = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся формулой} \\ \frac{1}{\sin^2 z} - 1 = \operatorname{ctg}^2 z \end{array} \right| = \int \frac{4\cancel{\sin^2 z}\cdot\left(-\frac{\cancel{\sqrt{5}}\cos z}{\cancel{2}\cancel{\sin^2(z)}}\right)dz}{\left[5+3\sin^2 z\right]\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{2}}\operatorname{ctg} z} =$$

$$= -4\int \frac{\cos z\,dz}{\left[5+3\sin^2 z\right]\frac{\cos z}{\sin z}} = -4\int \frac{\cancel{\cos z}\sin z\,dz}{\left[5+3(1-\cos^2 z)\right]\cancel{\cos z}} = -4\int \frac{-d(\overbrace{\cos z}^{u})}{8-3\underbrace{\cos^2 z}_{u^2}} =$$

$$= 4\int \frac{du}{8-3u^2} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{\frac{8}{3}-u^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{3}}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{\frac{8}{3}}}{u-\sqrt{\frac{8}{3}}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\cos z+\sqrt{\frac{8}{3}}}{\cos z-\sqrt{\frac{8}{3}}}\right| + C =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{обратная замена: } t = \frac{\sqrt{5}}{2\sin z} \Rightarrow \sin z = \frac{\sqrt{5}}{2t};\ \cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} \\ \text{тогда } \cos z = \sqrt{1-\frac{5}{4t^2}} = \sqrt{\frac{4t^2-5}{4t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2-5}}{2t} = \frac{\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-5}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{x^2+x-1}}{2x+1} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\frac{2\sqrt{x^2+x-1}}{2x+1}+\sqrt{\frac{8}{3}}}{\frac{2\sqrt{x^2+x-1}}{2x+1}-\sqrt{\frac{8}{3}}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{\frac{2}{3}}(2x+1)}{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{\frac{2}{3}}(2x+1)}\right| + C$$

2. $$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}dx = \left| \begin{array}{c} \text{Выделяем полный квадрат:} \\ x^2+2x-4 = \left(x+\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2 - 4 - \frac{2^2}{4\cdot 1} = (x+1)^2 - 5 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{(x+1)^2-5}}{(x+1)^3}dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена: } t = x+1 \\ dt = (x+1)'\,dx \Rightarrow dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{используем формулу 3 из таблицы 1;} \\ \text{в нашем случае: } \beta = 1,\ \ \alpha = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z} \Rightarrow dt = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sin z}\right)' dz \Rightarrow dt = -\frac{\sqrt{5}\cos z}{\sin^2(z)}dz \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2(z)} - 5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3(z)}} \frac{\sqrt{5}\cos z}{\sin^2(z)} dz = -\int \frac{\sqrt{\frac{5-5\sin^2(z)}{\sin^2(z)}} \cdot \cancel{\sin^3(z)}}{5\cancel{\sqrt{5}}} \frac{\cancel{\sqrt{5}}\cos z}{\cancel{\sin^2(z)}} dz =$$

$$= -\int \frac{\frac{\sqrt{5(1-\sin^2(z))}}{\cancel{\sin(z)}} \cdot \cancel{\sin z} \cdot \cos z}{5} dz = -\int \frac{\sqrt{5\cos^2(z)} \cdot \cos z}{5} dz =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \cos^2(z) dz = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2z)) dz =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \int 1 \cdot dz - \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \cos(2z) dz = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot z - \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \sin(2z) + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} (z + \sin z \cos z) + C = \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{\sqrt{5}}{\sin z} \Rightarrow z = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{5}}{t}\right), \\ \sin(\arcsin\alpha) = \alpha, \ \ \cos(\arcsin\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{t}\right) + \frac{\sqrt{5}}{t} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{t}\right)^2} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{t}\right) + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{t^2-5}}{t^2} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{делаем обратную} \\ \text{замену: } t \to x+1 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right) + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{(x+1)^2-5}}{(x+1)^2} \right) + C$$

3. $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{c} \text{используем формулу 1 из таблицы 1;} \\ \text{в нашем случае: } \beta = 1, \ \ \alpha = 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 2\sin t \Rightarrow dx = (2\sin t)'\, dt \Rightarrow dx = 2\cos t dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{4 - 4\sin^2(t)}}{4\sin^2(t)} 2\cos t dt = \int \frac{2\sqrt{4(1-\sin^2(t))} \cdot \cos t}{4\sin^2(t)} dt = \int \frac{\cancel{4}\cos t \cdot \cos t}{\cancel{4}\sin^2(t)} dt =$$

$$= \int \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} dt = \int \frac{1 - \sin^2(t)}{\sin^2(t)} dt = \int \frac{dt}{\sin^2(t)} - \int \frac{\cancel{\sin^2(t)}}{\cancel{\sin^2(t)}} dt = \int \frac{dt}{\sin^2(t)} - \int dt =$$

$$= -\operatorname{ctg} t - t + C = -\frac{\sqrt{1-\sin^2(t)}}{\sin t} - t + C = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t \Rightarrow t = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right), \\ \sin(\arcsin\alpha) = \alpha \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

4. $$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{используем формулу 2 из таблицы 1;} \\ \text{в нашем случае: } \beta = 1, \ \ \alpha = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = (\operatorname{tg} t)'\, dt \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\cos^2(t)} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2(t)} dt}{(1 - \operatorname{tg}^2(t))\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(t)}} = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся тем, что} \\ 1 + \operatorname{tg}^2(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)} \end{array} \right| = \int \frac{\cancel{\frac{1}{\cos^2(t)}} dt}{\left(1 - \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}\right) \cancel{\frac{1}{\cos t}}} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos t}dt}{\frac{\cos^2(t)-\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} = \int \frac{dt}{\cancel{\cos t} \cdot \frac{1-\sin^2(t)-\sin^2(t)}{\cancel{\cos^2(t)}}} = \int \frac{\cos t dt}{1-2\sin^2(t)} =$$

$$= \int \frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2(t)} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2(t)-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}\ln\left|\frac{\sin t-\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sin t+\sqrt{\frac{1}{2}}}\right| + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin t-1}{\sqrt{2}\sin t+1}\right| + C = \left| \begin{array}{c} 1+\operatorname{ctg}^2(t) = \dfrac{1}{\sin^2(t)} \Rightarrow \sin t = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2(t)}} \\ \operatorname{tg} t = x \Rightarrow \operatorname{ctg} t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \sin t = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}}+1}\right| + C$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите интегралы:

1. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$
2. $\int \sqrt{x^2-6x-7}dx$
3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$
4. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$