Занятие 3.3 Вычисление частных производных первого порядка функций двух переменных.

Предположим, что в некоторой области плоскости задана функция, зависящая от двух переменных: $f(x, y)$. Если зафиксировать переменную y и изменять только переменную x, то f станет функцией одной переменной x; производная этой функции называется *частной производной* функции f по переменной x и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ или f'_x. Производная функции f по переменной y при фиксированном значении переменной x называется частной производной функции f по переменной y и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ или f'_y. Аналогично определяются частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ функции $f(x, y, z)$, зависящей от трех переменных.

Примеры

Вычислите частные производные функций.

1. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$.

$$f'_x = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } y \text{ — число;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{\cancel{y^2}}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x \text{ — число;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{\cancel{y^2}}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{x}{\cancel{y^2}}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

2. $f(x, y) = x^y$.

$$f'_x = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } y \text{ — число;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как степенную функцию} \end{array} \right| = y \cdot x^{y-1}$$

$$f'_y = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x \text{ — число;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как показательную функцию} \end{array} \right| = x^y \cdot \ln x$$

3. $f(x, y, z) = \ln(x - y + z)$.

$$f'_x = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } y, z \text{ — числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{x - y + z} \cdot (x - y + z)'_x = \frac{1}{x - y + z}$$

$$f'_y = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, z - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{x-y+z} \cdot (x-y+z)'_y = -\frac{1}{x-y+z}$$

$$f'_z = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, y - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{x-y+z} \cdot (x-y+z)'_z = \frac{1}{x-y+z}$$

4. $f(x,y,z) = x\,\mathrm{e}^{yz}$.

$$f'_x = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } y, z - \text{числа;} \\ \text{тогда } \mathrm{e}^{yz} - \text{тоже число} \end{array} \right| = \mathrm{e}^{yz}$$

$$f'_y = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, z - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = x\,\mathrm{e}^{yz}(yz)'_y = xz\,\mathrm{e}^{yz}$$

$$f'_z = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, y - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = x\,\mathrm{e}^{yz}(yz)'_z = xy\,\mathrm{e}^{yz}$$

5. $f(x,y,z) = \operatorname{tg}\sqrt{x^2-yz}$.

$$f'_x = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } y, z - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \left(\sqrt{x^2-yz}\right)'_x =$$
$$= \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-yz}} \cdot (x^2-yz)'_x = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-yz}} \cdot 2x =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}$$

$$f'_y = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, z - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \left(\sqrt{x^2-yz}\right)'_y =$$
$$= \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-yz}} \cdot (x^2-yz)'_y = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-yz}} \cdot (-z) =$$
$$= -\frac{z}{2\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}$$

$$f'_z = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, y - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \\ \text{как сложную функцию} \end{array} \right| = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \left(\sqrt{x^2-yz}\right)'_z =$$
$$= \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-yz}} \cdot (x^2-yz)'_z = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2-yz}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-yz}} \cdot (-y) =$$
$$= -\frac{y}{2\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}$$

6. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$.

$$f'_x = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } y, z - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \text{ по формуле} \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right| = \frac{(x)'_x \cdot (x^2+y^2+z^2) - x \cdot (x^2+y^2+z^2)'_x}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$
$$= \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$f'_y = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, z - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \text{ по формуле} \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right| = \frac{(x)'_y \cdot (x^2+y^2+z^2) - x \cdot (x^2+y^2+z^2)'_y}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$
$$= \frac{0 \cdot (x^2+y^2+z^2) - 2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$f'_z = \left| \begin{array}{c} \text{считаем, что } x, y - \text{числа;} \\ \text{дифференцируем } f \text{ по формуле} \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right| = \frac{(x)'_z \cdot (x^2+y^2+z^2) - x \cdot (x^2+y^2+z^2)'_z}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$
$$= \frac{0 \cdot (x^2+y^2+z^2) - 2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите частные производные функций:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3y^2$
2. $f(x,y) = \dfrac{\sin y}{\cos x}$
3. $f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y) \cdot \mathrm{e}^{y/x}$
4. $f(x,y) = xy\ln(xy)$
5. $f(x,y,z) = xyz - \dfrac{3z}{xy}$
6. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7. $f(x,y,z) = \cos(yz - xy)$
8. $f(x,y,z) = x^{y^z}$

В процессе изучения дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка частные производные приходится использовать, для того чтобы проверить, является ли то или иное ДУ уравнением в *полных дифференциалах.*

Определение

Дифференциальное уравнение
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$
называется **уравнением в полных дифференциалах**, если выполняется условие
$$P'_y = Q'_x$$

Примеры

Проверить, является ли дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах.

1. $\mathrm{e}^x + y + \sin y + y'(\mathrm{e}^y + x + x\cos y) = 0$.

   Запишем уравнение в дифференциальной форме:

$$\mathrm{e}^x + y + \sin y + \frac{dy}{dx}(\mathrm{e}^y + x + x\cos y) = 0 \,\Big|\cdot dx \iff (\underbrace{\mathrm{e}^x + y + \sin y}_{P})dx + (\underbrace{\mathrm{e}^y + x + x\cos y}_{Q})dy = 0$$

   Находим производные функций P и Q:

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= \{\text{считаем, что } x - \text{число}\} = 1 + \cos y \\ Q'_x &= \{\text{считаем, что } y - \text{число}\} = 1 + \cos y \end{aligned}\right| \Longrightarrow P'_y = Q'_x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{e}^x + y + \sin y + y'(\mathrm{e}^y + x + x\cos y) = 0 \text{ — уравнение в полных дифференциалах}$$

2. $\dfrac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0$.

   В этом случае $P = \dfrac{y}{x}$, $Q = 3y^2 + \ln x$. Находим производные функций P и Q:

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= \{\text{считаем, что } x - \text{число}\} = \frac{1}{x} \\ Q'_x &= \{\text{считаем, что } y - \text{число}\} = \frac{1}{x} \end{aligned}\right| \Longrightarrow P'_y = Q'_x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0 \text{ — уравнение в полных дифференциалах}$$

3. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$.

   В этом случае $P = x^2 - \sin^2 y$, $Q = x\sin 2y$. Находим производные функций P и Q:

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= \{\text{считаем, что } x - \text{число}\} = -2\sin y\cos y = -\sin 2y \\ Q'_x &= \{\text{считаем, что } y - \text{число}\} = \sin 2y \end{aligned}\right| \Longrightarrow P'_y \neq Q'_x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0 \text{ — } \textbf{НЕ} \text{ является уравнением в полных дифференциалах}$$

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, является ли дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах.

1. $(3x - 5x^2y^2)dx + \left(3y^2 - \dfrac{10}{3}x^3y\right)dy = 0$
2. $(x\cos 2y - 3)dx - x^2\sin 2y dy = 0$
3. $(2x + y\,\mathrm{e}^{xy})\,dx + (1 + x\,\mathrm{e}^{xy})\,dy = 0$
4. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0$
5. $\sin(x+y)dx + x\cos(x+y)(dx+dy) = 0$
6. $(3x^2 + 3x^2\ln y)dx - \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0$
7. $3x^2y + \sin x = (\cos y - x^3)y'$
8. $(3x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + \mathrm{e}^y)dy = 0$