# Занятия 4.2-4.3
# Системы нелинейных уравнений

## 1 Введение

Рассмотрим систему нелинейных уравнений
$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases}$$
где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ - нелинейные функции, а $x$ и $y$ - неизвестные величины. Можно выделить пять методов решения таких систем:

1) метод разложения на множители,
2) метод исключения одной из неизвестных,
3) метод алгебраических преобразований,
4) метод замены переменных,
5) метод решения систем, содержащих однородное уравнение.

## 2 Метод разложения на множители

Представим каждую из функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ в виде произведения двух функций:
$$f(x,y)=f_1(x,y)\cdot f_2(x,y),$$
$$g(x,y)=g_1(x,y)\cdot g_2(x,y).$$

Тогда исходную систему можно заменить совокупностью четырех систем:
$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g_1(x,y)=0, \end{cases} \begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g_2(x,y)=0, \end{cases} \begin{cases} f_2(x,y)=0, \\ g_1(x,y)=0, \end{cases} \begin{cases} f_2(x,y)=0, \\ g_2(x,y)=0, \end{cases}$$
и совокупность решений этих систем образует решение исходной системы.

Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ раскладываются так, чтобы их множители были по своей структуре проще, чем сами исходные функции. Например, нелинейные функции можно попробовать разложить на произведение линейных сомножителей.

*Пример.* Решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + 2x - y + 1 = 0, \\ x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0. \end{cases}$$

Сначала разложим на множители первую функцию.

$f(x, y) = x^2 - 2y^2 - xy + 2x - y + 1 =$

Здесь: представим $2y^2 = y^2 + y^2$ и сгруппируем первое слагаемое с $x^2$, а второе с $xy$.

$= (x^2 - y^2) - (y^2 + xy) + 2x - y + 1 =$

$= (x - y)(x + y) - y(x + y) + 2x - y + 1 =$

$= (x + y)(x - 2y) + 2x - y + 1 =$

Здесь: представим $2x = x + x$ и добавим в функцию выражение $y - y$. Поскольку $y - y = 0$, знак равенства сохранится.

$= (x + y)(x - 2y) + x + x + y - y - y + 1 =$

$= (x + y)(x - 2y) + (x + y) + (x - 2y + 1) =$

$= (x + y)(x - 2y + 1) + (x - 2y + 1) =$

$= (x + y + 1)(x - 2y + 1).$

Аналогичным образом раскладываем на множители вторую функцию.

$g(x, y) = x^2 - 2y^2 + xy + x - y =$

Здесь: представим $2y^2 = y^2 + y^2$ и сгруппируем первое слагаемое с $x^2$, а второе с $xy$.

$= (x^2 - y^2) + (xy - y^2) + x - y =$

$= (x - y)(x + y) + (x - y)y + x - y =$

$= (x - y)(x + 2y) + (x - y) =$

$= (x - y)(x + 2y + 1).$

Тогда исходная система принимает вид:

$$\begin{cases}(x+y+1)(x-2y+1)=0,\\(x-y)(x+2y+1)=0.\end{cases}$$

Эта нелинейная система заменяется четырьмя системами линейных уравнений:

$$\begin{cases}x+y=-1,\\x-y=0,\end{cases}\ \begin{cases}x+y=-1,\\x+2y=-1,\end{cases}\ \begin{cases}x-2y=-1,\\x-y=0,\end{cases}\ \begin{cases}x-2y=-1,\\x+2y=-1.\end{cases}$$

Решения этих линейных систем в совокупности дают решение исходной нелинейной системы:

$x_1=-0.5$, $y_1=-0.5$,

$x_2=-1$, $y_2=0$,

$x_3=1$, $y_3=1$.

Решение четвертой системы совпадает с решением второй системы. Поэтому это решение можно не выписывать.

# 3 Метод исключения одной из неизвестных

Используя одно из уравнений исходной системы, выражаем одну неизвестную через другую и подставляем ее во второе уравнение. В результате получаем одно уравнение относительно одной неизвестной. Например, в системе

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\g(x,y)=0\end{cases}$$

выразим неизвестную величину $x$ через неизвестную величину $y$:

$$f(x,y)=0\Rightarrow x=h(y)$$

и подставим получившуюся функцию $x=h(y)$ во второе уравнение вместо неизвестной $x$:

$$x=h(y)\to g(x,y)=0.$$

В результате получаем одно уравнение относительно $y$:

$$g(h(y),y)=0.$$

Решив это уравнение, получаем значение $y$ и, далее, значение $x$ по формуле $x = h(y)$.

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy^2 + 4 = 0, \\ x - y^2 + 5 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x = y^2 - 5$ и подставляем это выражение в первое уравнение:

$$(y^2 - 5)y^2 + 4 = 0.$$

В результате получаем алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0.$$

Сделав замену $t = y^2$, приходим к обычному квадратному уравнению

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

с корнями $t_1 = 4$ и $t_2 = 1$. Тогда $y_{1,2} = \pm 2$ и $y_{3,4} = \pm 1$. Соответственно, $x_{1,2} = (\pm 2)^2 - 5 = -1$ и $x_{3,4} = (\pm 1)^2 - 5 = -4$.

# 4 Метод алгебраических преобразований

Уравнения системы можно складывать, вычитать, перемножать, делить и умножать на какую-либо функцию с целью их упрощения.

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x + 2y)(2x - y + 1) = 6, \\ \dfrac{2x - y + 1}{x + 2y} = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на $x + 2y$, зафиксировав ограничение на неизвестные: $x + 2y \neq 0$. Получим

$$\begin{cases} (x + 2y)(2x - y + 1) = 6, \\ 2x - y + 1 = \dfrac{2}{3}(x + 2y). \end{cases}$$

Теперь подставляем правую часть второго уравнения в первое вместо $2x - y + 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+2y)^2 = 6, \\ 2x - y + 1 = \dfrac{2}{3}(x+2y). \end{cases}$$

Поскольку из первого уравнения следует $x + 2y = \pm 3$, наша система преобразуется в совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y + 1 = \dfrac{2}{3}(x+2y), \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2y = -3, \\ 2x - y + 1 = \dfrac{2}{3}(x+2y), \end{cases} \end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y + 1 = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2y = -3, \\ 2x - y + 1 = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, мы привели исходную нелинейную систему к совокупности двух линейных систем, решение которых не представляет проблем:

$x_1 = 1$, $y_1 = 1$,

$x_2 = -1.8$, $y_2 = -0.6$.

Оба решения удовлетворяют условию $x + 2y \neq 0$.

# 5 Метод замены переменных

Данный метод рассмотрим сразу на конкретном примере.

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5x+5y+3xy=15, \\ x^2+y^2-x-y+xy=1. \end{cases}$$

В обоих уравнениях системы выделим полный квадрат и свернем его по формуле квадрата суммы:

$$\begin{cases} (x+y)^2+xy+5(x+y)=15, \\ (x+y)^2-xy-(x+y)=1. \end{cases}$$

Заметим, что в получившихся уравнениях неизвестные $x$ и $y$ присутствуют лишь в виде комбинаций $x+y$ и $xy$. Сделаем замену переменных:

$$u=x+y,\ v=xy.$$

Получаем систему уравнений относительно неизвестных $u$ и $v$:

$$\begin{cases} u^2+v+5u=15, \\ u^2-v-u=1. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, приходим к квадратному уравнению относительно одной неизвестной $u$:

$$2u^2+4u=16$$

или

$$u^2+2u-8=0,$$

с корнями $u_1=-4$ и $u_2=2$. Подставив эти корни в любое уравнение системы, получим $v_1=19$, $v_2=1$. Теперь возвращаемся к неизвестным $x$ и $y$:

1) $u_1=-4$, $v_1=19$

$$\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=19, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-4-x, \\ x(-4-x)=19, \end{cases}$$

$$-4x-x^2=19,$$

$$x^2+4x+19=0,$$

$$D=4^2-4\cdot 19=-60<0 \Rightarrow \text{решений нет.}$$

2) $u_2 = 2$, $v_2 = 1$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Решая аналогично предыдущему случаю, получаем итоговый ответ:

$$x = 1,\ y = 1.$$

# 6 Метод решения систем, содержащих однородное уравнение

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0, \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

в которой первое уравнение является однородным второй степени, а второе уравнение может быть любым.

Пусть $y \neq 0$. Тогда можно разделить однородное уравнение на $y^2$:

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C = 0.$$

Положив $x = ty$, получим обычное квадратное уравнение относительно $t$

$$At^2 + Bt + C = 0$$

с корнями $t_1$ и $t_2$. Далее, подставляем выражения $x = t_1 y$ и $x = t_2 y$ во второе уравнение исходной системы, откуда получаем $y_1$, $y_2$ и, соответственно, $x_1$, $x_2$.

Отдельно необходимо рассмотреть случай $y = 0$. Здесь из однородного уравнения следует, что $x = 0$. Если эти значения удовлетворяют второму уравнению системы, то получаем еще один ответ $x = 0$ и $y = 0$.

*Пример.* Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 - 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 - xy - 2x^2 = 4. \end{cases}$$
Делим первое уравнение на $y^2$:
$$1 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0.$$
Полагаем $x = ty$. Тогда
$$1 - 2t - 3t^2 = 0,$$
$$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{1}{3},$$
1) $t_1 = -1 \Rightarrow x = -y$.
Подставляем выражение для $x$ во второе уравнение системы:
$$y^2 - (-y)y - 2(-y)^2 = 4,$$
$$0 = 4,$$
решений нет.

2) $t_2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = 3x$.
Подставляем выражение для $y$ во второе уравнение системы:
$$(3x)^2 - x(3x) - 2x^2 = 4,$$
$$4x^2 = 4,$$
$$x = \pm 1,$$
$$y = \pm 3.$$

Отдельно проверим, удовлетворяют ли значения $x = 0$ и $y = 0$ второму уравнению системы:
$$0^2 - 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 4,$$
$$0 = 4$$
$$\Downarrow$$
$x = 0$ и $y = 0$ - не являются решением системы.

Таким образом, наша система имеет два решения:
$$x_1 = 1, y_1 = 3,$$
$$x_2 = -1, y_2 = -3.$$

# 7 Задачи для самостоятельного решения

1. $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^3y^4 + x^4y^3 = 24. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+3xy} + \dfrac{3}{y^2-xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2+3xy} - \dfrac{2}{y^2-xy} = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3 - 2y^2 = 0, \\ x^4 + y^4 - 8xy^2 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y^3 - 4xy = 0, \\ x^4 + y^4 - 8xy^2 = 0. \end{cases}$

 