Занятие 3.4
Построение графика функции в окрестности точек разрыва

1 Примеры решений

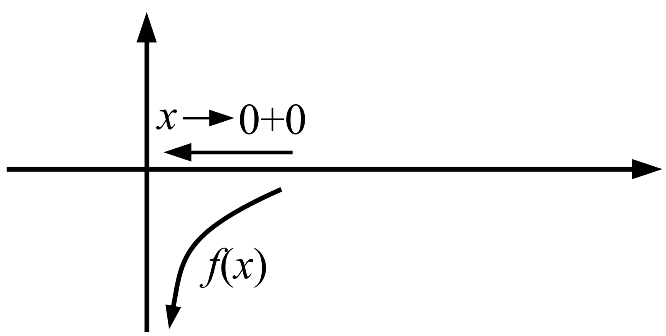
1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

Точки разрыва функции: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Поведение функции в окрестности точек разрыва определяется с помощью односторонних пределов.

1) $x_1 = 0$

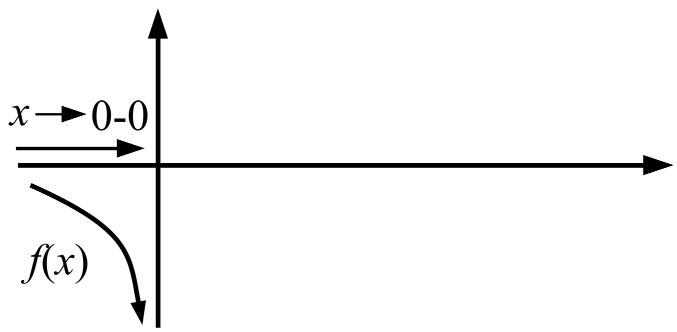
$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{(0+0)^2(0+0-1)} = \frac{1}{(0+0)(-1+0)} =$$
$$= \frac{1}{(0+0)(-1)} = \frac{1}{(0-0)} = -\infty.$$

Мы получили, что, когда x стремится к 0 справа (со стороны положительных чисел), функция $f(x)$ уходит в отрицательную бесконечность:



$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{1}{(0-0)^2(0-0-1)}=\frac{1}{(0+0)(-1-0)}=$$
$$=\frac{1}{(0+0)(-1)}=\frac{1}{(0-0)}=-\infty.$$

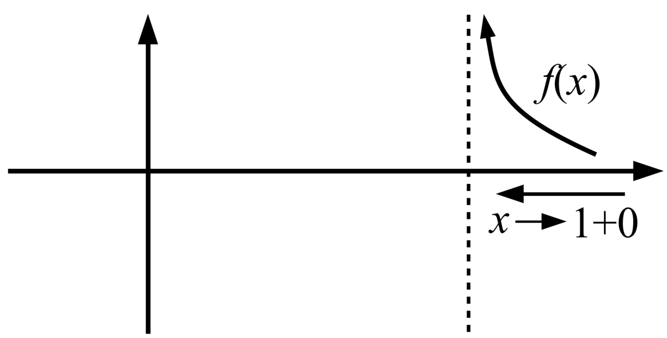
Когда x стремится к 0 слева (со стороны отрицательных чисел), функция $f(x)$ также уходит в отрицательную бесконечность:



2) $x_2=1$

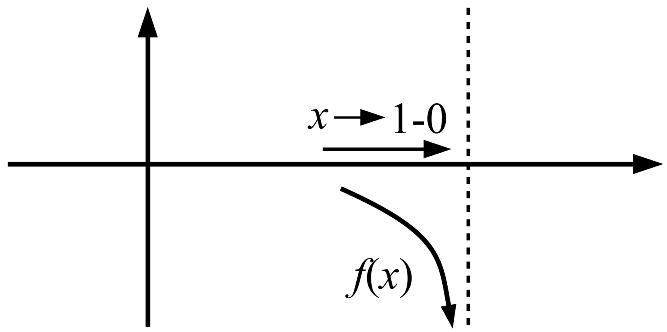
$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{1}{(1+0)^2(1+0-1)}=\frac{1}{(1+0)(0+0)}=$$
$$=\frac{1}{1\cdot(0+0)}=\frac{1}{(0+0)}=+\infty.$$

Когда x стремится к 1 справа, функция $f(x)$ уходит в положительную бесконечность:

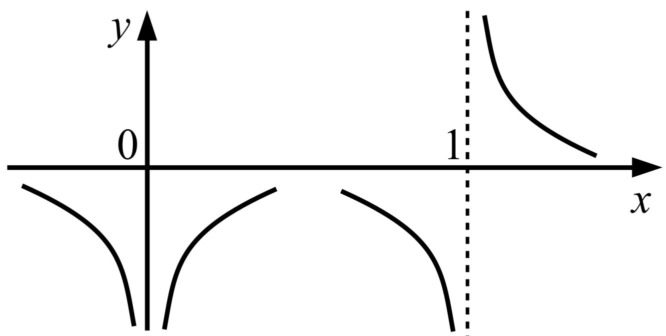


$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{1}{(1-0)^2(1-0-1)}=\frac{1}{(1-0)(0-0)}=$$
$$=\frac{1}{1\cdot(0-0)}=\frac{1}{(0-0)}=-\infty.$$

Когда x стремится к 1 слева, функция $f(x)$ уходит в отрицательную бесконечность:



Теперь объединяем все рассмотренные случаи на одном рисунке:



Таким образом, мы построили график функции $f(x)$ в окрестности точек разрыва $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2. $f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

Точки разрыва: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Рассмотрим односторонние пределы в данных точках.

1) $x_1 = 2$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{x}{4-x^2}} = \lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{x}{(2-x)(2+x)}} = 3^{\frac{2+0}{(2-(2+0))(2+(2+0))}} =$$

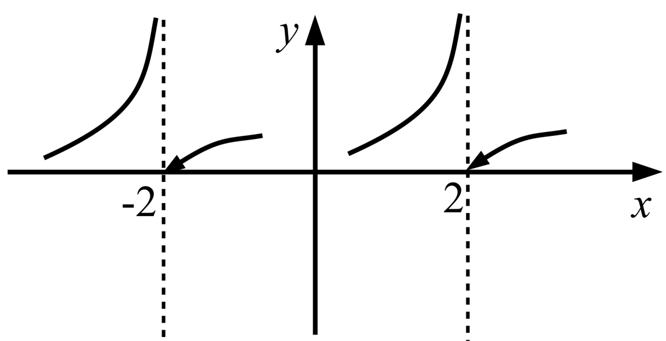
$$= 3^{\frac{2+0}{(0-0)(4+0)}} = 3^{\frac{2}{(0-0)\cdot 4}} = 3^{\frac{2}{(0-0)}} = 3^{-\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{x}{4-x^2}} = \lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{x}{(2-x)(2+x)}} = 3^{\frac{2-0}{(2-(2-0))(2+(2-0))}} =$$
$$= 3^{\frac{2-0}{(0+0)(4-0)}} = 3^{\frac{2}{(0+0)\cdot 4}} = 3^{\frac{2}{(0+0)}} = 3^{+\infty} = +\infty.$$

2) $x_2 = -2$

$$\lim_{x\to -2+0} 3^{\frac{x}{4-x^2}} = \lim_{x\to -2+0} 3^{\frac{x}{(2-x)(2+x)}} = 3^{\frac{-2+0}{(2-(-2+0))(2+(-2+0))}} =$$
$$= 3^{\frac{-2+0}{(4-0)(0+0)}} = 3^{\frac{-2}{4\cdot(0+0)}} = 3^{\frac{-2}{(0+0)}} = 3^{-\infty} = 0.$$
$$\lim_{x\to -2-0} 3^{\frac{x}{4-x^2}} = \lim_{x\to -2-0} 3^{\frac{x}{(2-x)(2+x)}} = 3^{\frac{-2-0}{(2-(-2-0))(2+(-2-0))}} =$$
$$= 3^{\frac{-2-0}{(4+0)(0-0)}} = 3^{\frac{-2}{4\cdot(0-0)}} = 3^{\frac{-2}{(0-0)}} = 3^{+\infty} = +\infty.$$

Используя получившиеся значения односторонних пределов и учитывая область значений показательной функции (только положительные числа), строим график функции в окрестности точек разрыва:



2 Задачи для самостоятельного решения

Построить график функции в окрестности точек разрыва:

1. $f(x) = \dfrac{3^{1/(x-2)} - 1}{3^{1/(x-2)} + 1}.$

2. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

3. $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$.