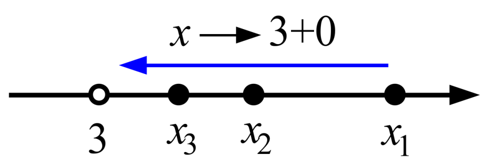
Занятие 3.3
Односторонние пределы

1 Примеры решений

1. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$.

А. Предел справа (правосторонний предел):
$\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$.

Чтобы вычислить предел, необходимо раскрыть знак модуля. Поскольку переменная x стремится к числу 3 справа ($x\to 3+0$), она принимает последовательность значений, которые постепенно приближаются к 3, но все время располагаются правее этого числа на числовой прямой.

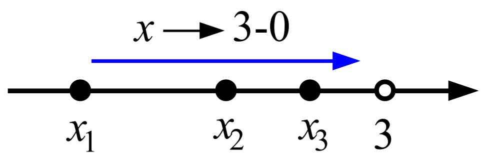


Поэтому $x>3$, а значит, $x-3>0$ и $|x-3|=x-3$. Тогда

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to 3+0}\frac{x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3+0}1=1.$$

Б. Предел слева (левосторонний предел):
$\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$.

В этом пределе переменная x стремится к числу 3 слева. Это означает, что все значения, которые она принимает, находятся слева от числа 3 на числовой прямой.



Поэтому $x < 3$, а значит, $x - 3 < 0$ и $|x-3| = -(x-3)$. Тогда

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3-0} \frac{x-3}{-(x-3)} = \lim_{x\to 3-0} -1 = -1.$$

2. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{2+x}{4-x^2}$.

А. $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{2+x}{4-x^2} =$

Вместо переменной x подставляем ее предельное значение, одновременно отбрасывая знак предела.

$= \dfrac{2+(2+0)}{4-(2+0)^2} = \star$

Необходимо вычислить значение величины $(2+0)^2$. Для этого используется простой эмпирический прием - заменяем 0 на какое-либо очень маленькое положительное число. Возьмем 0,01. Тогда

$2+0 \approx 2+0,01 = 2,01,$

$(2+0)^2 \approx 2,01^2 = 4,0401 = 4+0,0401.$

Мы получили, что $(2+0)^2$ приблизительно есть 4 плюс очень маленькое положительное число. Заменив это маленькое число на 0, получим точное равенство

$(2+0)^2 = 4+0.$

Возвращаемся к пределу.

$\star = \dfrac{2+(2+0)}{4-(4+0)} = \dfrac{2+2+0}{4-4-0} = \dfrac{4+0}{0-0} = \star\star$

Получившееся в числителе выражение $4{+0}$ означает, что мы приближаемся к числу 4 справа, а выражение $0{-0}$ в знаменателе показывает, что к нулю мы движемся слева, т.е. со стороны отрицательных чисел. Поскольку 4 - это число с определенным знаком (плюс), нам нет необходимости сохранять стоящее за ним $+0$, которое носит чисто справочный характер, показывая с какой стороны мы приближаемся к 4. В свою очередь, стоящий в знаменателе 0 - это число без определенного знака. Мы будем приписывать ему знак стоящего за ним выражения -0, т.е. знак минус, и трактовать запись $0{-0}$ как нуль с отрицательным знаком.

В теории пределов доказывается символическое равенство:

$$\frac{1}{0} = \infty,$$

где в числителе вместо 1 может стоять любое ненулевое число, а знак бесконечности определяется согласно обычным правилам арифметики в зависимости от знака числителя и знака, приписываемого нулю в знаменателе. Тогда

$$\star\star = \frac{4}{0{-0}} = -\infty.$$

$$\text{Б. } \lim_{x\to 2-0} \frac{2+x}{4-x^2} = \frac{2+(2{-0})}{4-(2{-0})^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2{-0} \approx 2-0,01 = 1,99 \\ (2{-0})^2 \approx 3,9601 = 4-0,0399 \\ (2{-0})^2 = 4{-0} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2+(2{-0})}{4-(4{-0})} = \frac{2+2{-0}}{4-4{+0}} = \frac{4{-0}}{0{+0}} = \frac{4}{0{+0}} = +\infty.$$

3. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}(3+x)^{1/(x+1)}$.

А. $\lim\limits_{x\to -1+0}(3+x)^{1/(x+1)} = (3-1+0)^{1/(-1+0+1)} =$
$= (2+0)^{1/(0+0)} = 2^{1/(0+0)} = 2^{+\infty} = +\infty.$

Б. $\lim\limits_{x\to -1-0}(3+x)^{1/(x+1)} = (3-1-0)^{1/(-1-0+1)} =$
$= (2-0)^{1/(0-0)} = 2^{1/(0-0)} = 2^{-\infty} = 0.$

4. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{x+1}{x^2-x^3}$.

А. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x+1}{x^2-x^3} = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x+1}{x^2(1-x)} = \dfrac{0+0+1}{(0+0)^2(1-(0+0))} =$
$= \dfrac{1+0}{(0+0)^2(1-0-0)} = \dfrac{1+0}{(0+0)^2(1-0)} =$

$$= \left| \begin{array}{l} 0+0 \approx 0+0,01 = 0,01 \\ (0+0)^2 \approx 0,0001 = 0+0,0001 \\ (0+0)^2 = 0+0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1+0}{(0+0)(1-0)} = \frac{1}{(0+0)\cdot 1} = \frac{1}{(0+0)} = +\infty.$$

Б. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x+1}{x^2-x^3} = \lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x+1}{x^2(1-x)} = \dfrac{0-0+1}{(0-0)^2(1-(0-0))} =$
$= \dfrac{1-0}{(0-0)^2(1-0+0)} = \dfrac{1-0}{(0-0)^2(1+0)} =$

$$= \left| \begin{array}{l} 0-0 \approx 0-0,01 = -0,01 \\ (0-0)^2 \approx 0,0001 = 0+0,0001 \\ (0-0)^2 = 0+0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1-0}{(0+0)(1+0)} = \frac{1}{(0+0)\cdot 1} = \frac{1}{(0+0)} = +\infty.$$

2 Задачи для самостоятельного решения

1. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} 7^{1/(2-x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \dfrac{1}{1-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} \dfrac{1}{1-x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{x}{x-2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \dfrac{1}{3^{2/x}-3}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \dfrac{x+1}{x^2-x^3}$.