Занятие 3.2
Потерянные и посторонние корни уравнений. Решение иррациональных уравнений

1 Потерянные и посторонние корни уравнений

Рассмотрим три характерных случая:

1. $3x(x-1) = 6(x-1)$.
Верное решение:
$3x(x-1) = 6(x-1)$,
$3x(x-1) - 6(x-1) = 0$,
$(x-1)(3x-6) = 0$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ - два корня.
Неверное решение:
$3x(x-1) = 6(x-1) \quad | : (x-1)$,
$3x = 6$,
$x = 2$ - один корень.

В данном случае мы потеряли корень $x = 1$, т.к. при делении уравнения на $x-1$ из множества возможных значений x исключается значение, при котором $x-1 = 0$, поскольку операция деления на ноль не определена.

2. $2x - 3 = 5$.
Верное решение:
$2x - 3 = 5$,
$2x = 8$,
$x = 4$ - один корень.
Неверное решение:
$2x - 3 = 5$,
$(2x - 3)^2 = 5^2$,
$4x^2 - 12x + 9 = 25$,
$x^2 - 3x - 4 = 0$,
$x_1 = 4$, $x_2 = -1$ - два корня.

В данном случае получили один лишний корень. Чтобы понять причину, проведем одинаковые преобразования двух уравнений, различающихся лишь правой частью:

$$\begin{array}{r|l} 2x - 3 = 5 & 2x - 3 = -5 \\ (2x - 3)^2 = 5^2 & (2x - 3)^2 = (-5)^2 \\ 4x^2 - 12x + 9 = 25 & 4x^2 - 12x + 9 = 25 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Видим, что возведение в квадрат двух разных уравнений приводит к одному и тому же уравнению, корнями которого служат как корень первого ($x_1 = 4$), так и корень второго ($x_2 = -1$) уравнений.

3. $2x - 1 = 3$.
Верное решение:
$2x - 1 = 3$,
$2x = 4$,
$x = 2$ - один корень.
Неверное решение:
$2x - 1 = 3 \quad | \cdot (x + 2)$,
$(2x - 1)(x + 2) = 3(x + 2)$,

$2x^2 - 8 = 0$,

$x_1 = 2$, $x_2 = -2$ - два корня.

Появление лишнего корня $x_2 = -2$, при котором $x + 2 = 0$, обусловлено тем, что умножение изначально неверного тождества $2x_2 - 1 = 3$ на ноль $(x_2 + 2 = -2 + 2 = 0)$ превращает его в верное тождество $0 = 0$.

Итог:

1. Деление уравнения на произвольную функцию может привести к потере корня.

2. Возведение уравнения в квадрат или его умножение на произвольную функцию может привести к появлению лишних корней.

2 Решение иррациональных уравнений

Рассмотрим основные приемы решения иррациональных уравнений на конкретных примерах.

1. $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 - 2x = 0$.

Квадратный корень оставляем в левой части уравнения, а все остальное переносим в правую часть.

$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$.

Обе части уравнения возводим в квадрат.

$(\sqrt{x^2 + 5x + 1})^2 = (2x - 1)^2$,

$x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$.

Возведение в квадрат позволило избавиться от иррациональности и получить обычное квадратное уравнение.

$3x^2 - 9x = 0$,

$3x(x - 3) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$ - возможные корни.

В предыдущем разделе было показано, что возведение уравнения в квадрат может привести к появлению лишнего корня. Поэтому надо проверить, являются ли полученные решения настоящими корнями исходного уравнения. Для этого подставляем их в исходное иррациональное уравнение:

$x_1 = 0$, $\sqrt{0^2 + 5 \cdot 0 + 1} + 1 - 2 \cdot 0 = 0$,

$2 = 0$ - неверное тождество.

Значит, $x_1 = 0$ не является корнем.

$x_2 = 3$, $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} + 1 - 2 \cdot 3 = 0$,

$0 = 0$ - верное тождество.

Значит, $x_2 = 3$ - корень.

Ответ: $x = 3$.

Примечание: Часто вместо проверки при решении иррациональных уравнений определяется область допустимых значений (ОДЗ) неизвестной x, и истинный корень уравнения ищется из условия его принадлежности ОДЗ. Такой подход менее предпочтителен из-за его большей трудоемкости.

2. $\sqrt{2x - 3} = \sqrt{x - 2}$.

Возводим обе части уравнения в квадрат.

$(\sqrt{2x - 3})^2 = (\sqrt{x - 2})^2$,

$2x - 3 = x - 2$,

$x = 1$ - возможный корень.

Проверка:

$x = 1$, $\sqrt{2 \cdot 1 - 3} = \sqrt{1 - 2}$,

$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$.

Формально мы получили верное тождество, но величина $\sqrt{-1}$ не является действительным числом, а значит, $x = 1$ не является решением.

Ответ: решений нет.

3. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1})^2=(\sqrt{2x-5})^2$,

$(x+6)-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+(x+1)=2x-5$,

$\sqrt{(x+6)(x+1)}=6$.

Еще раз возводим обе части уравнения в квадрат.

$(x+6)(x+1)=36$,

$x^2+7x-30=0$,

$x_1=3$, $x_2=-10$ - возможные корни.

Проверка:

$x_1=3$, $\sqrt{3+6}-\sqrt{3+1}=\sqrt{2\cdot 3-5}$,

$3-2=1$,

$1=1$ - верное тождество.

Значит, $x_1=3$ - корень.

$x_2=-10$, $\sqrt{-10+6}-\sqrt{-10+1}=\sqrt{2\cdot(-10)-5}$,

$\sqrt{-4}-\sqrt{-9}=\sqrt{-25}$.

Поскольку квадратный корень из отрицательного числа не определен, то $x_2=-10$ не является корнем.

Ответ: $x=3$.

4. $\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}=1$.

Возводим обе части уравнения в куб.

$(\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5})^3=1^3$,

$(5-x)+3\cdot(\sqrt[3]{5-x})^2\cdot\sqrt[3]{x+5}+3\cdot\sqrt[3]{5-x}\cdot(\sqrt[3]{x+5})^2+(x+5)=1$,

$10+3\cdot\sqrt[3]{5-x}\cdot\sqrt[3]{x+5}\cdot(\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5})=1$.

Вспоминаем, что согласно исходному уравнению сумма кубических корней, стоящая в скобках, равна единице:

$\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}=1$.

Тогда

$10+3\cdot\sqrt[3]{5-x}\cdot\sqrt[3]{x+5}=1$,

$3\cdot\sqrt[3]{(5-x)(x+5)}=-9$,

$\sqrt[3]{25 - x^2} = -3$.
Еще раз возводим обе части уравнения в куб.
$25 - x^2 = -27$,
$x^2 = 52$,
$x = \pm\sqrt{52}$.
Ответ: $x = \pm\sqrt{52}$.

Примечание: Возведение в нечетную степень не порождает лишних корней. Поэтому проверку можно не делать.

3 Задачи для самостоятельного решения

1. $\sqrt{x-1} = 3 - x$.
Ответ: $x = 2$.
2. $2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 12$.
Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 3,5$.
3. $\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5$.
Ответ: $x = 2$.
4. $\sqrt{(x+6)(x+1)} = 6$.
Ответ: $x_1 = -10$, $x_2 = 3$.
5. $\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = 3 + x^2$.
Ответ: корней нет.