

Занятие 3.1

Сложная функция и ее декомпозиция

1 Сложная функция

Сложная функция, составленная из двух простых функций $u(x)$ и $v(u)$, имеет вид

$$y = v(u(x)).$$

В этом случае $u(x)$ называется внутренней функцией, а $v(u)$ - внешней.

Сложная функция, составленная уже из трех простых функций, имеет вид

$$y = w(v(u(x))),$$

где $u(x)$ - внутренняя функция, $v(u)$ - промежуточная функция, а $w(v)$ - внешняя функция. Сложная функция может включать в себя несколько промежуточных функций. Например, сложная функция с двумя промежуточными функциями есть

$$y = h(w(v(u(x))))),$$

где $u(x)$ - внутренняя функция, $v(u)$, $w(v)$ - промежуточные функции, а $h(w)$ - внешняя функция.

Рассмотрим ряд задач на формирование сложной функции:

1. Составить сложную функцию $y = v(u(x))$, если

а) $u = 5x + 1$, $v = \sin u$

Чтобы получить сложную функцию y , нам необходимо подставить функцию $u(x)$ в функцию $v(u)$ вместо переменной u .

Ответ: $y = \sin(5x + 1)$.

б) $u = \operatorname{tg} x$, $v = 2^u$

Ответ: $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

в) $u = x^3 + 3x^2 - 1, v = u^5$

Ответ: $y = (x^3 + 3x^2 - 1)^5$.

2. Составить сложную функцию $y = w(v(u(x)))$, если

а) $u = x^2, v = e^u, w = \cos v$

Сначала подставляем функцию $u(x)$ в функцию $v(u)$ вместо переменной u , а затем получившуюся функцию $v(u(x))$ поставляем в $w(v)$ вместо переменной v .

Ответ: $y = \cos e^{x^2}$.

б) $u = 4x, v = \operatorname{tg} u, w = v^3 + 6v - 1$

Ответ: $y = (\operatorname{tg} 4x)^3 + 6 \operatorname{tg} 4x - 1$.

в) $u = \left(\frac{1}{2}\right)^x, v = u^2 + u + 1, w = \log_3 v$

Ответ: $y = \log_3 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \right)$.

3. Составить сложную функцию $y = v(u(x)) + w(h(x))$, если $u = \sqrt{x}, v = \ln u, w = \operatorname{ctg} h, h = x^3$

Ответ: $y = \ln \sqrt{x} + \operatorname{ctg} x^3$.

4. Составить сложную функцию $y = v(u(x)) + w(v(x))$, если

а) $u = \sqrt[3]{x}, v = 2^u, w = \log_5 v$

Заметим, что $v(u(x)) \neq v(x)$. Функция $v(x)$ получается из функции $v(u)$ заменой переменной u на переменную x :

$v(u) = 2^u \Rightarrow v(x) = 2^x$.

Ответ: $y = 2^{\sqrt[3]{x}} + \log_5 2^x$.

б) $u = \arcsin x, v = \operatorname{tg} u, w = v^2 + 1$

Ответ: $y = \operatorname{tg}(\arcsin x) + (\operatorname{tg} x)^2 + 1$.

2 Декомпозиция сложной функции

В предыдущем параграфе мы решали прямую задачу составления сложной функции по заданным простым. В этом параграфе рас-

смотрим обратную задачу составления простых функций по заданной сложной.

1. Выписать для сложной функции $y = v(u(x))$ составляющие ее простые функции

а) $y = \cos 6x$

Ответ: $u = 6x, v = \cos u$.

б) $y = 2^{3x+1}$

Ответ: $u = 3x + 1, v = 2^u$.

в) $y = (4x - 1)^3$

Ответ: $u = 4x - 1, v = u^3$.

г) $y = (6x^2 + 3x - 2)^4$

Ответ: $u = 6x^2 + 3x - 2, v = u^4$.

2. Выписать для сложной функции $y = w(v(u(x)))$ составляющие ее простые функции

а) $y = \sin^2 4x$

Ответ: $u = 4x, v = \sin u, w = v^2$.

б) $y = \log_3^5(6x^2 - 4)$

Ответ: $u = 6x^2 - 4, v = \log_3 u, w = v^5$.

в) $y = 2^{(\operatorname{tg} x)^2 - 3 \operatorname{tg} x + 1}$

Ответ: $u = \operatorname{tg} x, v = u^2 - 3u + 1, w = 2^v$.

г) $y = \sqrt{4^x + 2^x + 1}$

Ответ: $u = 2^x, v = u^2 + u + 1, w = \sqrt{v}$.

3. Выписать для заданной сложной функции составляющие ее простые функции и указать ее общий вид

а) $y = \ln^2(\sin 3x)$

Ответ: $u = 3x, v = \sin u, w = \ln v, h = w^2, y = h(w(v(u(x))))$.

б) $y = 2^{3 \operatorname{tg} x^2}$

Ответ: здесь возможны два варианта

1) $u = x^2, v = 3 \operatorname{tg} u, w = 2^v, y = w(v(u(x)))$,

2) $u = x^2, v = \operatorname{tg} u, w = 3v, h = 2^w, y = h(w(v(u(x))))$.

$$в) y = (3x + 4)^5 + 3^{2x-1}$$

$$\text{ОТВЕТ: } u = 3x + 4, v = u^5, w = 2x - 1, h = 3^w, \\ y = v(u(x)) + h(w(x)).$$

$$г) y = \ln \sin 6x + \arccos 2^x$$

$$\text{ОТВЕТ: } u = 6x, v = \sin u, w = \ln v, h = 2^x, t = \arccos h, \\ y = w(v(u(x))) + t(h(x)).$$