Занятие 3.2 Основные приемы техники интегрирования: подведение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям.

Подведение под знак дифференциала

Дифференциалом функции называют ту часть приращения этой функции, которая линейна относительно приращения аргумента. Дифференциал df функции f, зависящей от x, можно вычислить по формуле:

$$\boxed{df = f'(x)dx} \tag{1}$$

Форма дифференциала не зависит от выбора переменной: если функция f зависит от t, то $df = f'(t)dt$; если f зависит от ξ, то $df = f'(\xi)d\xi$ и т.д. Пусть $f(u)$ – некоторая функция, зависящая от u; $u(x)$ – некоторая функция, зависящая от x; функцию $f(u(x))$ называют *композицией функций* f и u (по-другому такую функцию называют *сложной функцией*). Предположим, что подынтегральная функция представляет собой произведение $f(u) \cdot u'(x)$. В этом случае для упрощения процесса интегрирования можно функцию $u'(x)$ "подвести под знак дифференциала" , т.е. выражение $u'(x)dx$ заменить на du:

$$\boxed{\int f(u) \cdot \underbrace{u'(x)dx}_{du} = \int f(u)du} \tag{2}$$

При вычислении интегралов с помощью подведения под знак дифференциала помогают формулы:

Таблица 1: Основные дифференциалы

1	$dx = \dfrac{1}{a}d(ax+b),\ a,b = \text{const},\ a \neq 0$	7	$\sin x dx = -d(\cos x)$
2	$xdx = \dfrac{1}{2}d(x^2+a),\ a = \text{const}$	8	$\cos x dx = d(\sin x)$
3	$x^n dx = \dfrac{1}{n+1}d(x^{n+1}),\ n \neq -1$	9	$\dfrac{dx}{\cos^2(x)} = d(\operatorname{tg} x)$
4	$\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$	10	$\dfrac{dx}{\sin^2(x)} = -d(\operatorname{ctg} x)$
5	$\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$	11	$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$
6	$\mathrm{e}^x\, dx = d(\mathrm{e}^x)$	12	$\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x) = -d(\operatorname{arcctg} x)$

Примеры

1. $\displaystyle\int \frac{\overbrace{2x}^{u'(x)}\,dx}{\underbrace{1+x^2}_{u(x)}} = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой 2 из таблицы 1;}\\ \text{в нашем случае } a=1, \text{ т.к. в знаменателе имеем } x^2\underline{+1}\end{array}\right| = \int \frac{d(\overbrace{x^2+1}^{u(x)})}{\underbrace{x^2+1}_{u(x)}} = \int \frac{du}{u} =$

$\displaystyle = \ln|u| + C = \left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } u\to x^2+1\end{array}\right| = \ln\left(x^2+1\right) + C$

2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3\cos x}\sin x dx = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой 7}\\ \text{из таблицы 1}\end{array}\right| = -\int \mathrm{e}^{3\cos x}\, d(\cos x) =$

$\displaystyle = \left|\begin{array}{c}\text{умножим } \cos x \text{ под знаком дифференциала}\\ \text{на 3 и скомпенсируем эту тройку}\\ \text{множителем } \frac{1}{3} \text{ перед интегралом}\end{array}\right| = -\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{\overbrace{3\cos x}^{u}}\, d(\underbrace{3\cos x}_{u}) =$

$\displaystyle = -\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{u}\, du = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{u} + C = \left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } u\to \cos x\end{array}\right| = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3\cos x} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\ln t dt}{t} = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой 4}\\ \text{из таблицы 1}\end{array}\right| = \int \underbrace{\ln t}_{u}\, d(\underbrace{\ln t}_{u}) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C =$

$\displaystyle = \left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } u\to \ln t\end{array}\right| = \frac{\ln^2(t)}{2} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^z\, dz}{\sqrt{1+\mathrm{e}^z}} = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой 6}\\ \text{из таблицы 1}\end{array}\right| = \int \frac{d(\overbrace{1+\mathrm{e}^z}^{u})}{\sqrt{1+\mathrm{e}^z}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C =$

$\displaystyle = 2\sqrt{u} + C = \left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } u\to 1+\mathrm{e}^z\end{array}\right| = 2\sqrt{1+\mathrm{e}^z} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{\sin(2\varphi)d\varphi}{4+\cos^2(\varphi)} = \int \frac{2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{4+\cos^2(\varphi)} = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой 7}\\ \text{из таблицы 1}\end{array}\right| = -\int \frac{2\cos\varphi d(\cos\varphi)}{4+\cos^2(\varphi)} =$

$\displaystyle = \left|\begin{array}{c}\text{сделаем замену:}\\ \cos\varphi = x\\ \text{и найдем интеграл}\\ \text{по аналогии}\\ \text{с примером 1}\end{array}\right| = -\int \frac{2xdx}{4+x^2} = -\int \frac{d(4+x^2)}{4+x^2} = -\ln(4+x^2) + C = -\ln\left(4+\cos^2(\varphi)\right) + C$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите производные функций:

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{3-7x^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-5}}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2 x}}{x}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}^2 2x}$

Замена переменной

Представим, что на интервале $(a;b)$ задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти интеграл $\int f(x)dx$. Пусть $\varphi(x)$ – другая непрерывная на интервале $(a;b)$ функция. Введем новую переменную t следующим образом: $t=\varphi(x)$, причем $t\in(\alpha;\beta)$ при $x\in(a;b)$. Пусть функция g – обратная к функции φ; тогда $x=g(t)$ и $f(x)=f(g(t))$. Если $g(t)$ имеет непрерывную производную при $t\in(\alpha;\beta)$, то $dx=g'(t)dt$. Тогда справедлива **формула замены переменной** в неопределенном интеграле:

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(g(t))\cdot g'(t)dt} \tag{3}$$

! После нахождения интеграла в правой части формулы (3) необходимо делать обратную замену (возвращаться от новой переменной t к переменной x).

Примеры

1. $$\int\cos(\overbrace{2x-3}^{t})dx=\left|\begin{array}{c}\text{замена: } t=2x-3\Rightarrow x=\dfrac{t+3}{2}\\ dx=\left(\dfrac{t+3}{2}\right)'dt\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+C=\left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } t\to 2x-3\end{array}\right|=\frac{1}{2}\sin(2x-3)+C$$

2. $$\int\frac{dx}{1+e^{2x}}=\left|\begin{array}{c}\text{замена: } t=1+e^{2x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln|t-1|\\ dx=\left(\dfrac{1}{2}\ln|t-1|\right)'dt\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{2(t-1)}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t-1)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{в числителе}\\ \text{прибавим и вычтем } t\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{t-t+1}{t(t-1)}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(t-1)}-\frac{\cancel{(t-1)}}{t\cancel{(t-1)}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t|\right)+C=\left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } t\to 1+e^{2x}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|e^{2x}|-\ln|1+e^{2x}|\right)+C=\frac{1}{2}\left(2x-\ln|1+e^{2x}|\right)+C$$

3. $$\int\frac{(4x-1)dx}{x^2-2x+10}=\left|\begin{array}{c}\text{в знаменателе выделяем полный квадрат, пользуясь формулой:}\\ \boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}}\\ \text{в нашем случае } a=1,\ b=-2,\ c=10,\ \text{следовательно}\\ x^2-2x+10=(x-1)^2+9\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(4x-1)dx}{(\underbrace{x-1}_{t})^2+9}=\left|\begin{array}{c}\text{замена: } t=x-1\Rightarrow x=t+1\\ dx=(t+1)'dt\Rightarrow dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{(4(t-1)-1)dt}{t^2+9}=$$

$$=4\int\frac{tdt}{t^2+9}-5\int\frac{dt}{t^2+9}=\left|\begin{array}{c}\text{в первом интеграле}\\ \text{воспользуемся формулой 2}\\ \text{из таблицы 1}\end{array}\right|=2\int\frac{d(t^2+9)}{t^2+9}-5\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$= 2\ln|t^2+9| - \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + C = \left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } t \to x-1\end{array}\right| = 2\ln|(x-1)^2+9| - \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

4. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \left|\begin{array}{c}\text{в знаменателе, под знаком корня,}\\ \text{выделяем полный квадрат:}\\ 1-2x-x^2 = -(x+1)^2+2\end{array}\right| = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{замена: } t = x+1 \Rightarrow x = t-1\\ dx = (t-1)'\,dt \Rightarrow dx = dt\end{array}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } t \to x+1\end{array}\right| = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

5. $$\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}} = \left|\begin{array}{c}\text{замена: } t = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = t^2+2\\ dx = \left(t^2+2\right)'dt \Rightarrow dx = 2tdt\end{array}\right| = 2\int \frac{(t^2+2+1)\cancel{t}dt}{(t^2+2)\cancel{t}} =$$

$$= 2\int\left(\cancel{\frac{t^2+2}{t^2+2}} + \frac{1}{t^2+2}\right)dt = 2\int dt + 2\int\frac{dt}{t^2+2} = 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{делаем обратную}\\ \text{замену: } t \to \sqrt{x-2}\end{array}\right| = 2\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}\right) + C = 2\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x-2}{2}}\right) + C$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int \sqrt{11x-3}dx$
2. $\int \sin(5x-2)dx$
3. $\int x(2x-1)^{20}dx$
4. $\int x\sqrt{x-4}dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$
6. $\int \frac{(3x-5)dx}{x^2-4x+5}$

Интегрирование по частям

Пусть производные функций $u(x), v(x)$ существуют и непрерывны на некотором интервале. Согласно правилу Лейбница на этом интервале $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$; согласно свойству неопределенного интеграла (формула (**??**)): $\int(u(x)v(x))'dx = u(x)v(x)$. Следовательно, $\int(u(x)v(x))'dx = \int(u'(x)v(x)+v'(x)u(x))dx = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)$. Перенося второй интеграл в правую часть равенства с противоположным знаком, получим **формулу интегрирования по частям**:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx} \tag{4}$$

Формула (4) нужна для того, чтобы вычисление интеграла $\int u(x)v'(x)dx$ заменить на вычисление интеграла $\int v(x)u'(x)dx$, который найти значительно легче, чем первый. Для того, чтобы не привязываться к конкретной переменной, формулу интегрирования по частям часто записывают через дифференциалы функций, пользуясь тем, что $u'(x)dx = du,\ v'(x)dx = dv$:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \tag{5}$$

Рассмотрим 3 основных типа интегралов, которые удобно вычислять с помощью интегрирования по частям. При применении формулы (5) главное – понять, какую функцию выбрать в качестве u и что обозначить через dv. Назовем функции $\sin x$, $\cos x$, a^x *"прямыми"*, а функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\log_a x$ – *обратными*. Тогда можно сформулировать следующие **Правила:**

1. Если подынтегральная функция – **произведение "прямой" функции на многочлен**:

$$\boxed{\int P_n(x)\cos(\beta x)dx,\ \int P_n(x)\sin(\beta x)dx,\ \int P_n(x)a^{\beta x}dx\ \ a,\beta=\text{const},\ n\ -\text{степень многочлена}}$$

   то в качестве u мы берем многочлен: $u = P_n(x)$, а в качестве dv – произведение "прямой" функции на дифференциал переменной интегрирования: $dv = \cos(\beta x)dx$ или $dv = \sin(\beta x)dx$, или $dv = \mathrm{e}^{\beta x}\,dx$. Для вычисления этих интегралов формулу интегрирования по частям нужно применить столько раз, какова степень многочлена (т.е. n раз) – см. пример 1 ниже.

Замечание

Если в интегралах $\int P_n(x)\cos(\beta x)dx$, $\int P_n(x)\sin(\beta x)dx$, $\int P_n(x)a^{\beta x}dx$ степень n многочлена $P_n(x)$ велика (например, $n > 2$), то метод интегрирования по частям становится громоздким. В этом случае удобнее воспользоваться **методом неопределенных коэффициентов**.

(a) Составляем уравнение:

$$\begin{gathered}
\int P_n(x)\cos(\beta x)dx = \big(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + C\big)\cos(\beta x) + \\
+ \big(Dx^n + Ex^{n-1} + \ldots + F\big)\sin(\beta x) + \text{const} \\
\text{или} \\
\int P_n(x)\sin(\beta x)dx = \big(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + C\big)\cos(\beta x) + \\
+ \big(Dx^n + Ex^{n-1} + \ldots + F\big)\sin(\beta x) + \text{const} \\
\text{или} \\
\int P_n(x)a^{\beta x}dx = (Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + C)a^{\beta x} + \text{const}
\end{gathered} \tag{6}$$

(b) Находим производную от правой и левой частей равенства (6).

(c) Приравниваем коэффициенты либо при $x^k\cos(\beta x)$ или $x^k\sin(\beta x)$, либо, после сокращения обеих частей равенства на $a^{\beta x}$, при одинаковых степенях x^k.

(d) Составляем систему уравнений относительно $A, B, \ldots, C, D, E, \ldots, F$ и решаем её.

(e) Подставляем числа $A, B, \ldots, C, D, E, \ldots, F$ в формулы (6).

2. Если подынтегральная функция – **произведение обратной функции на многочлен**:

$$\boxed{\begin{gathered}\int P_n(x)\arcsin(x)dx,\ \int P_n(x)\arccos(x)dx,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}(x)dx,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}(x)dx,\\ \int P_n(x)\log_a x dx\\ a=\text{const},\ n\ -\text{степень многочлена}\end{gathered}}$$

то в качестве u мы берем обратную функцию: $u = \arccos(x)$ или $u = \arcsin(x)$, или $u = \mathrm{arctg}(x)$, или $u = \mathrm{arcctg}(x)$, или $u = \log_a x$, а в качестве dv – произведение многочлена на дифференциал переменной интегрирования: $dv = P_n(x)dx$.

! В некоторых интегралах вместо многочлена $P_n(x)$ можно встретить степенную функцию x^p, в том числе с отрицательным показателем $(p < 0)$, – см. пример 2.

3. К интегралам (циклические интегралы)

$$\boxed{\int e^{ax}\cos(bx)dx,\ \int e^{ax}\sin(bx)dx,\ \int \cos(\ln(bx))dx,\ \int \sin(\ln(bx))dx \quad a, b = \mathrm{const}}$$

формулу интегрирования по частям необходимо всегда применять 2 раза. При вычислении этих интегралов не важно, какую функцию выбирать в качестве u, а какую – в качестве dv, но важно помнить, что ОБА РАЗА в качестве u необходимо выбирать ОДНУ И ТУ ЖЕ (см. пример 4).

Замечание

Интегралы $\int e^{ax}\cos(bx)dx$, $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ можно решить методом неопределенных коэффициентов:

(a) Составляем уравнение:

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = e^{ax}\left(A\cdot\cos(bx) + B\cdot\sin(bx)\right) + \mathrm{const} \tag{7}$$

(b) Находим производную от правой и левой частей равенства (7):

$$e^{ax}\cos(bx) = a\cdot e^{ax}\left(A\cdot\cos(bx) + B\cdot\sin(bx)\right) + e^{ax}\left(-A\cdot b\cdot\sin(bx) + B\cdot b\cdot\cos(bx)\right) \tag{8}$$

(c) Делим правую и левую части равенства на e^{ax}; в правой части раскрываем скобки; приводим подобные слагаемые:

$$\cos(bx) = \cos(bx)\left(a\cdot A + b\cdot B\right) + \sin(bx)\left(a\cdot B - b\cdot A\right) \tag{9}$$

(d) Слева коэффициент при cos равен 1, следовательно, справа коэффициент при cos тоже равен 1. Слева нет sin, следовательно, справа коэффициент при sin равен нулю:

$$\begin{cases} a\cdot A + b\cdot B = 1 \\ a\cdot B - b\cdot A = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты A и B (a, b – известные числа) и подставляем их в формулу (7). Интегралы вида $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ можно вычислить аналогично.

Примеры

1. $$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}\cdot \ln x dx = \int x^{-2}\cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x} = x^{-1}dx \\ dv = x^{-2}dx \Longrightarrow v = -x^{-1} \end{array} \right| =$$
$$= -x^{-1}\ln x + \int x^{-2}dx = -x^{-1}\ln(x) - x^{-1} + C = -x^{-1}(\ln(x)+1) + C =$$
$$= -\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

2. $$\int \operatorname{arctg} x dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot 1\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{в данном случае } P_n(x) = 1 \ (n=0) \\ u = \operatorname{arctg} x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array} \right| =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \left| \begin{array}{c} \text{делаем замену:} \\ t = x^2+1 \Longrightarrow dt = 2xdx \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array} \right| =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{\cancel{x}}{t}\frac{dt}{2\cancel{x}} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

3. $$\int e^{2x}\sin x dx = \left| \begin{array}{c} \text{интегрируем по частям первый раз} \\ \text{Пусть } dv = \sin x dx \Longrightarrow v = -\cos(x);\ u = e^{2x} \Longrightarrow du = 2e^{2x}dx \end{array} \right| =$$
$$= -\cos x\, e^{2x} - \int 2e^{2x}(-\cos x)dx = -\cos x\, e^{2x} + 2\int e^{2x}\cos x =$$
$$= \left| \begin{array}{c} \text{интегрируем по частям второй раз} \\ u = e^{2x} \Longrightarrow du = 2e^{2x}dx;\ dv = \cos x dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= -\cos x\, e^{2x} + \sin x\, e^{2x} - 2\int e^{2x}\sin x dx + C$$

Мы получили уравнение:
$$\int e^{2x}\sin x dx = -\cos x\, e^{2x} + \sin x\, e^{2x} - 2\int e^{2x}\sin x dx + C$$

Перенесем интеграл из правой части в левую; в правой части вынесем экспоненту за скобки, разделим правую и левую части на 3:
$$3\int e^{2x}\sin x dx = e^{2x}(\sin x - \cos x) + C \Longrightarrow \int e^{2x}\sin x dx = \frac{1}{3}e^{2x}(\sin x - \cos x) + C$$

4. Вычислим тот же интеграл, используя метод неопределенных коэффициентов. Составляем уравнение:
$$\int e^{2x}\sin x dx = e^{2x}\left(A\cdot\cos x + B\cdot\sin x\right) + \text{const} \tag{11}$$
Находим производную от правой и левой частей:
$$e^{2x}\sin x = 2e^{2x}\left(A\cdot\cos x + B\cdot\sin x\right) + e^{2x}\left(-A\cdot\sin x + B\cdot\cos x\right)$$
Делим правую и левую части равенства на e^{2x}; в правой части раскрываем скобки; приводим подобные слагаемые:
$$\sin x = \cos x(2A+B) + \sin x(2B-A)$$

Слева коэффициент при sin равен 1, следовательно, справа коэффициент при sin тоже равен 1. Слева нет cos, следовательно, справа коэффициент при cos равен нулю:

$$\begin{cases} 2B - A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\dfrac{1}{5} \\ B = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты A и B в формулу (11):

$$\int e^{2x} \sin x dx = e^{2x} \left(-\frac{1}{5} \cdot \cos x + \frac{2}{5} \cdot \sin x \right) + \mathrm{const}$$

5. Вычислим интеграл $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x}\, dx$ с помощью метода неопределенных коэффициентов. Составляем уравнение:

$$\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x}\, dx = (Ax^2 + Bx + C) e^{-x} + \mathrm{const} \tag{12}$$

Находим производную от правой и левой частей:

$$(x^2 - 2x + 5) e^{-x} = (2Ax + B) e^{-x} - (Ax^2 + Bx + C) e^{-x}$$

Делим правую и левую части равенства на e^{-x}; в правой части раскрываем скобки; приводим подобные слагаемые:

$$x^2 - 2x + 5 = -Ax^2 + (2A - B)x + B + C$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} -A = 1 \\ 2A - B = -2 \\ B + C = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = 5 \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты A, B, C в формулу (12):

$$\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x}\, dx = (-x^2 + 5) e^{-x} + \mathrm{const}$$

6. Вычислим интеграл $\int (2x^2 + 3x) \cos 2x dx$ с помощью метода неопределенных коэффициентов. Составляем уравнение:

$$\int (2x^2 + 3x) \cos 2x dx = (Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x + \mathrm{const} \tag{13}$$

Находим производную от правой и левой частей:

$$\begin{aligned} (2x^2 + 3x) \cos 2x = & \underline{(2Ax + B)} \cos 2x - \underline{(Ax^2 + Bx + C) 2} \sin 2x + \\ & + \underline{(2Dx + E)} \sin 2x + \underline{(Dx^2 + Ex + F) 2} \cos 2x \end{aligned}$$

Приведём подобные слагаемые в правой части:

$$(2x^2 + 3x) \cos 2x = (2Dx^2 + (2A + 2E)x + B + 2F) \cos 2x + (-2Ax^2 + (-2B + 2D)x - 2C + E) \sin 2x$$

Слева множитель при cos равен $(2x^2+3x)$, следовательно, справа множитель при cos тоже равен $(2x^2+3x)$. Слева нет sin, следовательно, справа множитель при sin равен нулю:

$$\begin{cases} 2Dx^2+(2A+2E)x+B+2F=2x^2+3x \\ -2Ax^2+(-2B+2D)x-2C+E=0 \end{cases}$$

Из первого равенства следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x; из второго равенства следует, что коэффициенты при всех степенях x равны нулю:

$$\begin{cases} 2D=2 \\ 2A+2E=3 \\ B+2F=0 \\ -2A=0 \\ -2B+2D=0 \\ -2C+E=0 \end{cases} \iff \begin{cases} D=1 \\ E=\dfrac{3-2A}{2} \\ F=-\dfrac{B}{2} \\ A=0 \\ B=D \\ C=\dfrac{E}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} D=1 \\ E=\dfrac{3}{2} \\ F=-\dfrac{1}{2} \\ A=0 \\ B=1 \\ C=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты A,B,C,D,E,F в формулу (13):

$$\int(2x^2+3x)\cos 2x dx=\left(x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)\sin 2x+\mathrm{const}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int x\sin(3x)dx$
2. $\int(2x+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$
3. $\int x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$
4. $\int(x-1)^2\,\mathrm{e}^x\,dx$
5. $\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$
6. $\int(x^2-x)3^{-2x}dx$
7. $\int x^2\cos x dx$
8. $\int \mathrm{arctg}(\sqrt{x})dx$
9. $\int(x^2-4x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$