Занятие 3.1 Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции.

Пусть u и v – дифференцируемые на промежутке X функции, C – произвольное вещественное число.

Основные правила дифференцирования

1. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:
$$\boxed{(C \cdot u)' = C \cdot u'} \tag{1}$$
2. Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных этих функций:
$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'} \tag{2}$$
3. Производная произведения функций вычисляется по формуле:
$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \tag{3}$$
$$\boxed{(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'} \tag{4}$$
4. Производная отношения функций вычисляется по формуле:
$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}} \tag{5}$$

Таблица 1: Основные производные

u	u'	u	u'	u	u'	u	u'
C	0	e^x	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$kx+b$	k	a^x	$a^x \ln(a)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
x^a	ax^{a-1}	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{ctg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\mathrm{arcctg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Примеры

1. Найдите производную функции $y = (3x^2 - x + 10)\,\mathrm{e}^x$.

   Воспользуемся формулами (1)-(3):

$$\begin{aligned}\big((3x^2 - x + 10)\,\mathrm{e}^x\big)' &= (3x^2 - x + 10)'\,\mathrm{e}^x + (3x^2 - x + 10)\,(\mathrm{e}^x)' = \\ &= \big((3x^2)' - x' + (10)'\big)\,\mathrm{e}^x + (3x^2 - x + 10)\,\mathrm{e}^x = \\ &= (6x - 1)\,\mathrm{e}^x + (3x^2 - x + 10)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(3x^2 + 5x + 9)\end{aligned}$$

2. Найдите производную функции $y = 4^x \cdot (\operatorname{tg} x - \log_8 x) \cdot \arccos x$.

   Воспользуемся формулами (2) и (4):

$$(4^x \cdot (\operatorname{tg} x - \log_8 x) \cdot \arccos x)' =$$

$$= (4^x)' \cdot (\operatorname{tg} x - \log_8 x) \cdot \arccos x + 4^x \cdot (\operatorname{tg} x - \log_8 x)' \cdot \arccos x + 4^x \cdot (\operatorname{tg} x - \log_8 x) \cdot (\arccos x)' =$$

$$= 4^x \ln 4 \cdot (\operatorname{tg} x - \log_8 x) \cdot \arccos x + 4^x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x \ln 8}\right) \cdot \arccos x - 4^x \cdot (\operatorname{tg} x - \log_8 x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3. Найдите производную функции $y = \dfrac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$.

   Воспользуемся формулами (2),(3) и (5):

$$\left(\frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}\right)' = \frac{(x \sin x + \cos x)' \cdot (x \cos x - \sin x) - (x \sin x + \cos x) \cdot (x \cos x - \sin x)'}{(x \cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{(\cancel{\sin x} + x \cos x - \cancel{\sin x}) \cdot (x \cos x - \sin x) - (x \sin x + \cos x) \cdot (\cancel{\cos x} - x \sin x - \cancel{\cos x})'}{(x \cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{x \cos x \cdot (x \cos x - \sin x) + x \sin x \cdot (x \sin x + \cos x)}{(x \cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{x^2 \cos^2 x - \cancel{x \cos x \sin x} + x^2 \sin^2 x + \cancel{x \sin x \cos x}}{(x \cos x - \sin x)^2} = \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите производные функций:

1. $y = -5 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
2. $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1}$
3. $y = \mathrm{e}^x \cdot \sin x$
4. $y = \dfrac{3x - 1}{2x^2 + 1}$
5. $y = \operatorname{tg} x \cdot \arcsin x \cdot \log_3 x$
6. $y = \dfrac{x^2 \sin x}{\ln x}$
7. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$
8. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $y = \dfrac{x \cdot \log_2 x}{\cos x}$

Производная сложной функции

Пусть функция $y = y(u)$ имеет производную в точке u, а функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x. Тогда композиция функций y и u (сложная функция $y = y(u(x))$) имеет в точке x производную, равную произведению производных функций $y(u)$ и $u(x)$:

$$\boxed{\left[y(u(x))\right]'_x = y'_u \cdot u'_x} \tag{6}$$

По тому же принципу вычисляют производную композиции трех функций y, u и w:

$$\boxed{\left[y(u(w(x)))\right]'_x = y'_u \cdot u'_w \cdot w'_x} \tag{7}$$

Примеры

1. Найдите производную функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

$$\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]' = \left|\begin{array}{c} u(x) = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow u'_x = 1 + \left(\sqrt{x^2+1}\right)' \\ y(u) = \ln u \Rightarrow y'_u = \dfrac{1}{u} \\ y'_x = y'_u \cdot u'_x = \dfrac{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{u} = \dfrac{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ \text{Вычислим производную функции } z(x) = \sqrt{x^2+1}: \\ w(x) = x^2+1 \Rightarrow w'_x = 2x \\ z(w) = \sqrt{w} \Rightarrow z'_w = \dfrac{1}{2\sqrt{w}} \\ \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = z'_x = z'_w \cdot w'_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{w}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}(\cancel{x+\sqrt{x^2+1}})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. Найдите производную функции $y = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

$$\left[\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]' = \left|\begin{array}{c} w(x) = \dfrac{x}{2} \Rightarrow w'_x = \dfrac{1}{2} \\ u(w) = \operatorname{tg} w \Rightarrow u'_w = \dfrac{1}{\cos^2 w} \\ y(u) = \sqrt{u} \Rightarrow y'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \\ \left[y(u(w(x)))\right]'_x = y'_u \cdot u'_w \cdot w'_x \end{array}\right| = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\cos^2 w} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \text{делаем} \\ \text{обратную замену} \end{array}\right| = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

3. Найдите производную функции $y = \mathrm{e}^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$.

$$\left[\mathrm{e}^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right]' = \left| \begin{array}{c} z(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow z'_x = -\dfrac{1}{x^2} \\ w(z) = \sin z \Rightarrow w'_z = \cos z \\ u(w) = w^2 \Rightarrow u'_w = 2w \\ y(u) = \mathrm{e}^u \Rightarrow y'_u = \mathrm{e}^u \\ \left[y(u(w(z(x))))\right]'_x = y'_u \cdot u'_w \cdot w'_z \cdot z'_x \end{array} \right| = \mathrm{e}^u \cdot 2w \cdot \cos z \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{делаем} \\ \text{обратную замену} \end{array} \right| = \mathrm{e}^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите производные функций:

1. $y = \ln \sin x$
2. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$
3. $y = \sin \ln x$
4. $y = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{3x-1}{5}}$
5. $y = \ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]$
6. $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$
7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ln \dfrac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}}$
8. $y = 2^{\cos x + \operatorname{tg} x}$
9. $y = \arcsin \dfrac{7\sin x + 3}{7 + 3\sin x}$