Занятие 2.3 Предел функции. Сравнение бесконечно малых функций.

Определение (окрестность точки)

Пусть ε — вещественное число.

Эпсилон-окрестность (ε-окрестность) точки x – это все числа, большие, чем $x-\varepsilon$, но меньшие, чем $x+\varepsilon$ (другими словами: это интервал от $x-\varepsilon$ до $x+\varepsilon$, который обозначается $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$). **Обозначение**: $U_\varepsilon(x)$.

Вместо ε (эпсилон) могут быть использованы любые другие буквы греческого или латинского алфавита. Например, δ (дельта). **Дельта-окрестность** (δ-окрестность) точки x – это все числа, большие, чем $x-\delta$, но меньшие, чем $x+\delta$. **Обозначение**: $U_\delta(x)$.

Определение (предел функции в точке)

Пусть a — вещественное число.

Предел функции при x, стремящемся к a – это число (назовем его b), обладающее следующим свойством: насколько бы малое положительное число ε мы ни взяли, всегда найдется такое положительное (не обязательно малое) число δ, что для всех значений аргумента из δ-окрестности точки a, соответствующие значения функции обязательно попадают в ε-окрестность точки b.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Определение (бесконечно малая функция)

Функция f называется бесконечно малой в окрестности точки a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Определение (сравнение бесконечно малых функций)

Пусть f и g — бесконечно малые в окрестности точки a функции.

1. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$, $C = \text{const} \neq 0$, то функции f и g – **бесконечно малые одного порядка**.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то функции f – **бесконечно малая более высокого порядка, чем** g. **Обозначение:** $f = o(g)$ (эту запись произносят так: "f равно о-малое от g").

3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то функции f и g – **эквивалентные бесконечно малые**.
Обозначение: $f\sim g$.

В окрестности точки $x=0$ следующие бесконечно малые функции эквивалентны:

1. $\sin x\sim x$
2. $\cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2}$
3. $\operatorname{tg} x\sim x$
4. $\arcsin x\sim x$
5. $\operatorname{arctg} x\sim x$
6. $\operatorname{sh} x\sim x$
7. $\operatorname{ch} x\sim 1+\dfrac{x^2}{2}$
8. $\operatorname{th} x\sim x$
9. $(1+x)^a\sim 1+ax$
10. $\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}$
11. $\ln(1+x)\sim x$
12. $a^x\sim 1+x\ln a$
13. $\mathrm{e}^x\sim 1+x$

Примеры

1. $$\lim_{x\to0}\frac{x(\mathrm{e}^x-1)}{1-\cos x}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{e}^x\sim1+x\\ \cos x\sim1-\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{x(\cancel{1}+x-\cancel{1})}{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\cancel{x^2}\cdot\frac{2}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to0}2=2$$

2. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin\sin\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\ln\cos3x}=\left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\sim\dfrac{x^2}{2}\\ \cos3x\sim1-\dfrac{(3x)^2}{2}\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\sin\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{(3x)^2}{2}\right)}=\left|\begin{array}{c}\sin\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\sim\dfrac{x^2}{2}\\ \ln\left(1-\dfrac{(3x)^2}{2}\right)\sim-\dfrac{(3x)^2}{2}\end{array}\right|=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{-\frac{(3x)^2}{2}}=\left|\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\sim\frac{x^2}{2}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{9x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{9\cancel{x^2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{9}$$

3. $$\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=\left|\begin{array}{c}\text{замена:}\\ x-a=y\Rightarrow x=y+a\\ x\to a\Rightarrow y\to0\end{array}\right|=\lim_{y\to0}\frac{a^{y+a}-a^a}{y}=\lim_{y\to0}\frac{a^a(a^y-1)}{y}=a^a\lim_{y\to0}\frac{a^y-1}{y}=$$
$$=|a^y\sim1+y\ln a|=a^a\lim_{y\to0}\frac{\cancel{1}+y\ln a-\cancel{1}}{y}=a^a\lim_{y\to0}\frac{\cancel{y}\ln a}{\cancel{y}}=a^a\lim_{y\to0}\ln a=a^a\ln a$$

4. $$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2x}=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся основным}\\ \text{логарифмическим тождеством: } B=\mathrm{e}^{\ln B}\\ \text{в нашем случае } B=(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2x}\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2x}}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\operatorname{ctg}^2x\ln(\cos x)}=$$
$$=\left|\begin{array}{c}\cos x\sim1-\dfrac{x^2}{2}\\ \operatorname{ctg}^2x=\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}=\left|\begin{array}{c}\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\sim-\dfrac{x^2}{2}\\ \sin^2x\sim x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\cos^2x}{\cancel{x^2}}\left(-\frac{\cancel{x^2}}{2}\right)}=$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\cos^2x\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\cos^20\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{3^x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg}^2(8x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}^{3/2}x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+9x}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^4(\sqrt{3}x)}$