Занятия 2.1-2.2 Преобразование графиков функций. Графики функций в декартовой и полярной системах координат. Графики функций, заданных параметрически

1. Преобразование графиков функций

Построим график функции $\sqrt{x}$:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

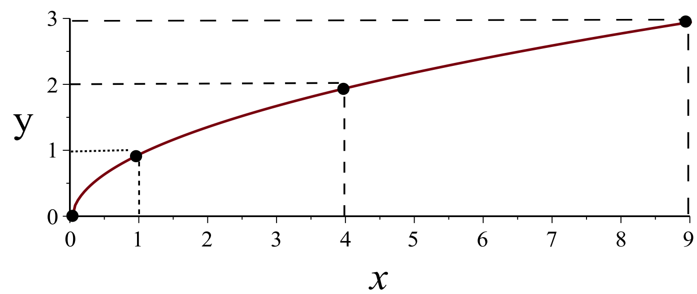

Рис. 1: График функции $y = \sqrt{x}$.

1. $y = -f(x)$: умножение функции на -1 приводит к зеркальному отражению графика относительно оси абсцисс.

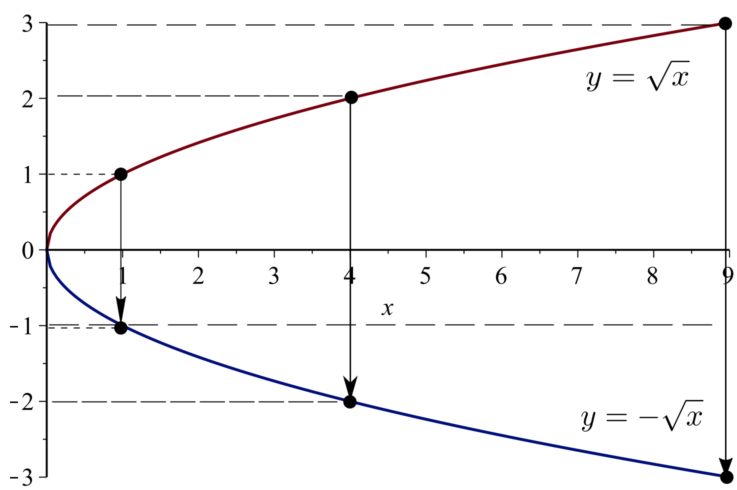

Рис. 2: Связь графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$.

2. $y = f(-x)$: умножение аргумента на -1 приводит к зеркальному отражению графика относительно оси ординат.

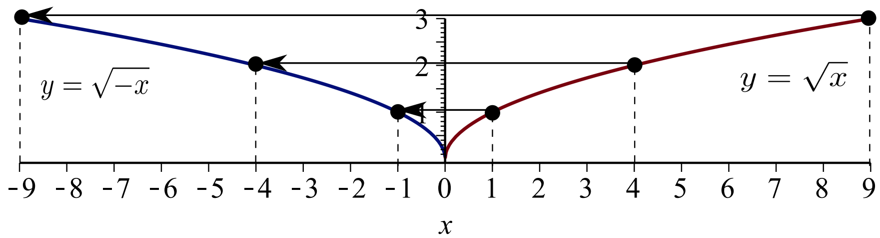

Рис. 3: Связь графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$.

3. $y = f(x + a)$: прибавление к аргументу числа a приводит к сдвигу графика вправо, если $a < 0$; влево, если $a > 0$.

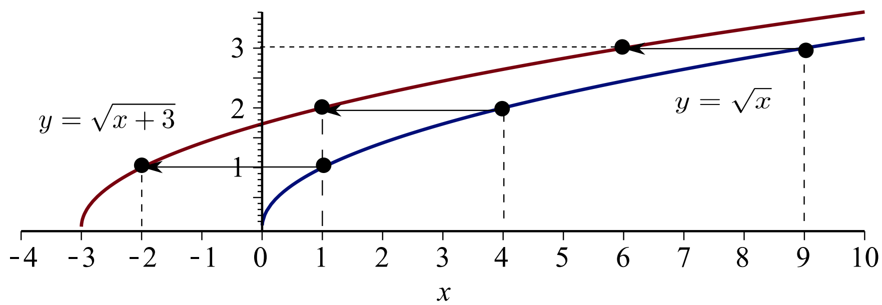

Рис. 4: Связь графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x+3}$.

4. $y = f(x) + a$: прибавление к функции числа a приводит к сдвигу графика вниз, если $a < 0$; вверх, если $a > 0$.

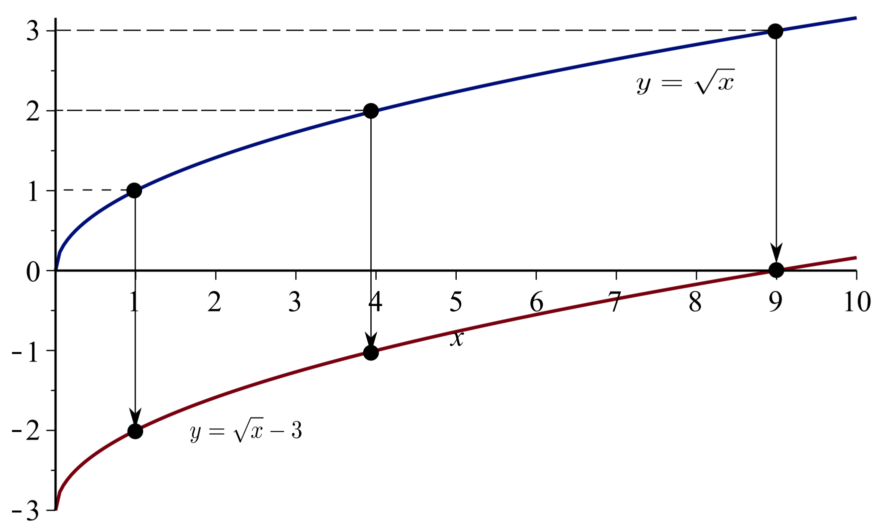

Рис. 5: Связь графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x} - 3$.

5. $y = f(ax)$: умножение аргумента на число a приводит к сжатию графика вдоль оси x в $|a|$ раз, если $|a| > 1$; к растяжению графика вдоль оси x в $\dfrac{1}{|a|}$ раз, если $|a| < 1,\ a \neq 0$.

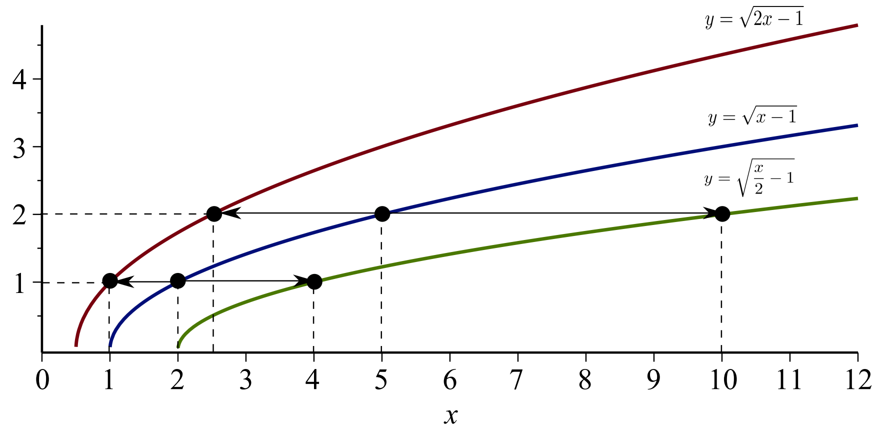

Рис. 6: Связь графиков функций $y = \sqrt{x-1},\ y = \sqrt{2x-1}$ и $y = \sqrt{\dfrac{x}{2} - 1}$. Обратите внимание на то, что точки с одними и теми же ординатами (т.е. значениями y) у графика $y = \sqrt{2x-1}$ находятся в 2 раза ближе к оси y, чем у графика $y = \sqrt{x-1}$ (это результат **сжатия** вдоль оси x), а у графика $y = \sqrt{\dfrac{x}{2} - 1}$ – в 2 раза дальше от оси y, чем у графика $y = \sqrt{x-1}$ (это результат **растяжения** вдоль оси x).

6. $y = af(x)$: умножение функции на число a приводит к растяжению графика вдоль оси y в $|a|$ раз, если $|a| > 1$; к сжатию графика вдоль оси y в $\dfrac{1}{|a|}$ раз, если $|a| < 1,\ a \neq 0$.

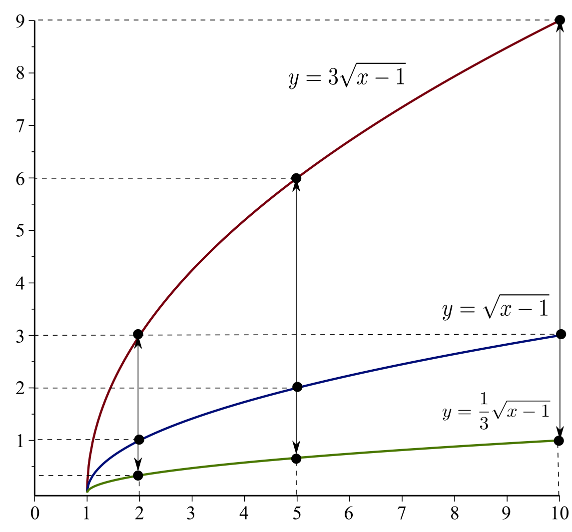

Рис. 7: Связь графиков функций $y = \sqrt{x-1},\ y = 3\sqrt{x-1}$ и $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x-1}$. Обратите внимание на то, что точки с одними и теми же абсциссами (т.е. значениями x) у графика $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x-1}$ находятся в 3 раза ближе к оси x, чем у графика $y = \sqrt{x-1}$ (это результат **сжатия** вдоль оси y), а у графика $y = 3\sqrt{x-1}$ – в 3 раза дальше от оси x, чем у графика $y = \sqrt{x-1}$ (это результат **растяжения** вдоль оси y).

Задачи для самостоятельного решения

Постройте графики функций:

1. $y = (x-2)^2$
2. $y = (x+3)^2$
3. $y = 2x^3$
4. $y = \dfrac{1}{2}x^3$
5. $y = \dfrac{1}{x} + 1$
6. $y = \dfrac{1}{x-1} - 2$
7. $y = -2 + \sqrt{x+1}$

2. Графики функций, заданных параметрически

Построим кривую, заданную параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$.

Сделаем таблицу:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	2	$\approx 2,5$	$\approx 2,8$	3	2	-1	$\approx -2,8$	$\approx -4,5$	-6
y	0	$\approx 0,3$	$\approx 0,8$	$\approx 1,7$	4	$\approx 5,2$	$\approx 4,8$	$\approx 3,7$	0

t	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
x	$\approx -4,5$	$\approx -2,8$	-1	2	3	$\approx 2,8$	$\approx 2,5$	2
y	$\approx -3,7$	$\approx -4,8$	$\approx -5,2$	-4	$\approx -1,7$	$\approx -0,8$	$\approx -0,3$	0

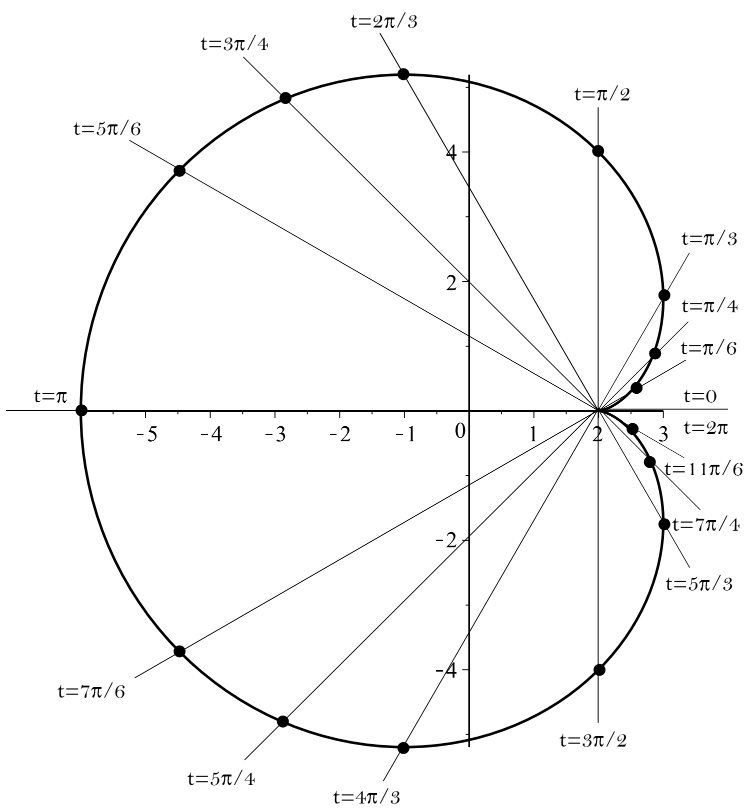

Рис. 8: Отмечаем на координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице; соединяем эти точки линией. Полученная кривая – **кардиоида**.

Задачи для самостоятельного решения

Постройте графики функций:

1. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

3. Графики функций в полярной системе координат

Построим кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = 2\sin(3\theta)$.

1 шаг. Выясним, какие значения может принимать угол θ:

$$r \geqslant 0 \Longrightarrow \sin(3\theta) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 3\theta \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \Longleftrightarrow \theta \in \left[\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right],\ n \in \mathbb{Z}$$

Пусть $n = 0$, тогда $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; пусть $n = 1$, тогда $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$; пусть $n = 2$, тогда $\theta \in \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$; пусть $n = 3$, тогда $\theta \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$. На тригонометрической окружности отрезок $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ совпадает с отрезком $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, следовательно, нет смысла продолжать увеличивать n – мы будем получать те же самые отрезки, которые получили для $n = 0, 1, 2$.

2 шаг. Сделаем таблицу:

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$
r	0	$\approx 1,4$	2	$\approx 1,4$	0	0	$\approx 1,4$	2	$\approx 1,4$	0	0	$\approx 1,4$	2	$\approx 1,4$	0

3 шаг. Строим график.

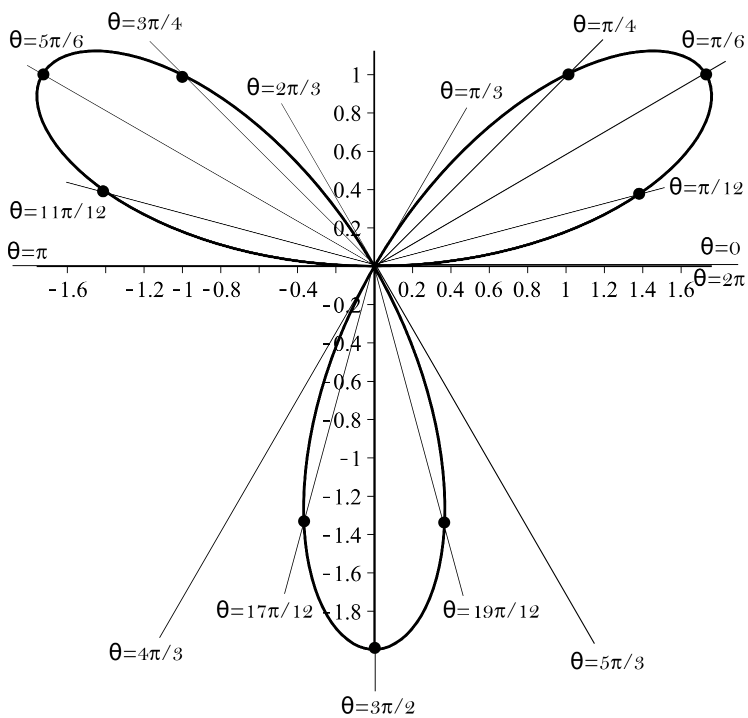

Рис. 9: С помощью транспортира (или "на глаз" , т.е. приблизительно) строим прямые, соответствующие углам θ, указанным в первой строке таблицы. На каждой прямой ставим точку, которая находится на расстоянии r (смотри вторую строку таблицы) от начала координат. Соединяем эти точки линией. Полученная кривая – **трехлепестковая роза**.

Задачи для самостоятельного решения

Постройте графики функций:

1. $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$
2. $r = 3\cos\varphi$
3. $r = \sin\varphi$
4. $r = \varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$