Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
Лекция 2.1

Аннотация

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости в отрезках. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

1 Плоскость в пространстве

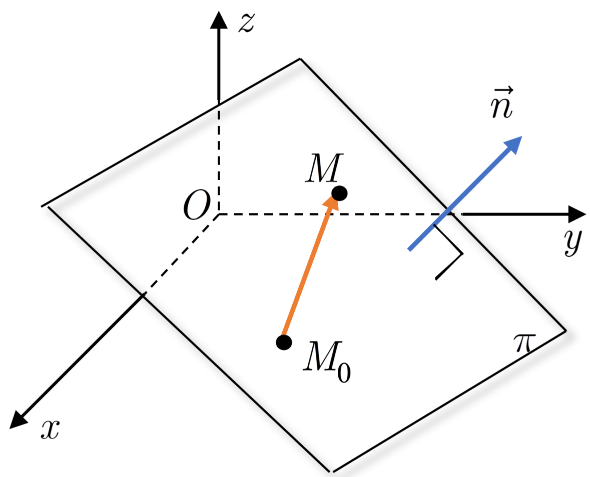
1.1 Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, а ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен этой плоскости.

Произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ортогонален вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю:
$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$.

Отсюда получаем **уравнение плоскости с заданным нормальным вектором**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1}$$



Определение

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называют **нормальным вектором плоскости**.

1.2 Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (1) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить **общее уравнение плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.

2. Если $A = 0$, то плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox.

3. Если $A = D = 0$, то плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox.

4. Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости Oxy.

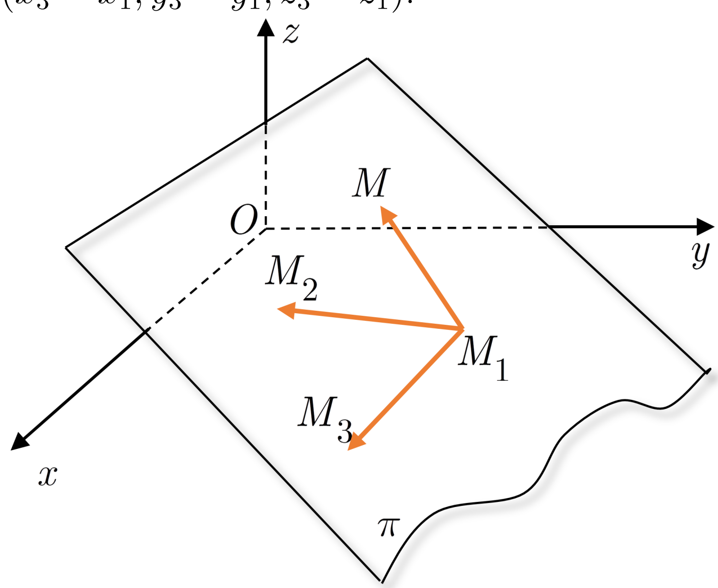
5. Если $A = B = D = 0$, то получаем уравнение $z = 0$ плоскости Oxy.

1.3 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости π, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Пусть произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π. Составим векторы:

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$,
$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,
$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.



Эти векторы лежат на плоскости π тогда и только тогда, когда они компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю:

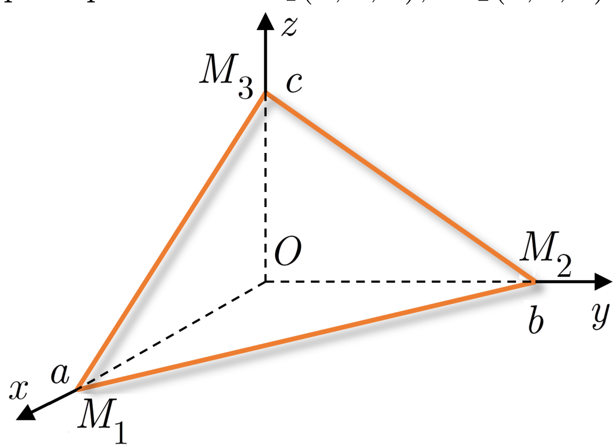
$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0.$$

Записав это условие в координатной форме, получим **уравнение плоскости, проходящей через три точки**:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

1.4 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz отрезки a, b и c, т.е. проходит через три точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$ и $M_3(0,0,c)$.



Подставим координаты этих точек в уравнение (3) и раскроим определитель. Получим **уравнение плоскости в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{4}$$

2 Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы своими общими уравнениями:
$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,
$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.
Тогда
а) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются по прямой, уравнением которой служит система

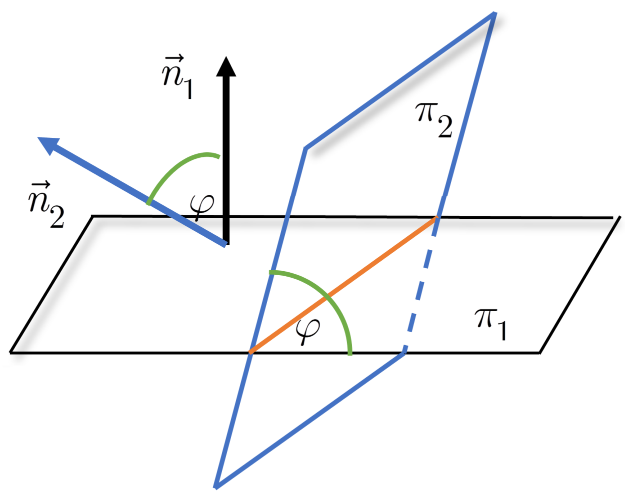
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Определение

Под **углом** φ **между плоскостями** π_1 и π_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей π_1 и π_2 равен одному из таких углов. Поэтому

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1\ \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \qquad (5)$$



Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

3 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость π задана общим уравнением

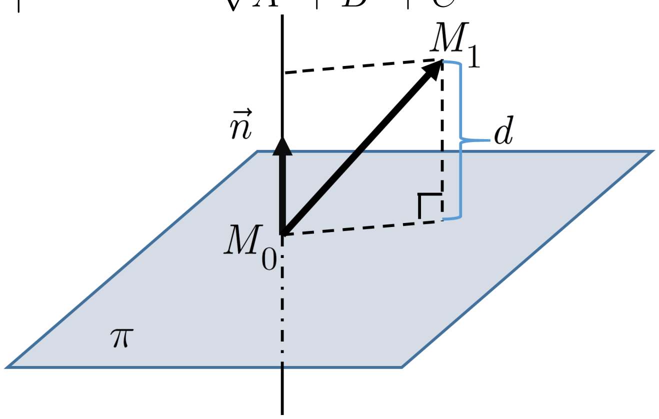
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Выберем для плоскости единичный нормальный вектор

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C)$$

с началом в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Тогда расстояние d от произвольной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}| =$$
$$= \left|\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| =$$
$$= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$



Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$
$$\Downarrow$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D.$$

Следовательно,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6)$$