Занятие 1.4 Представление рациональных функций в виде суммы элементарных дробей.

Определение

Рациональная функция – это отношение двух полиномов.

- Рациональная функция называется *правильной*, если степень полинома, стоящего в числителе строго меньше степени полинома, стоящего в знаменателе.
- Рациональная функция называется *неправильной*, если степень полинома, стоящего в числителе больше или равна степени полинома, стоящего в знаменателе.

Примеры

1. Правильные рациональные функции:

$$f(x) = \frac{3x-5}{x^3-x+1}, \quad g(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x-9)^4}$$

2. Неправильные рациональные функции:

$$h(x) = \frac{3x^2-x+10}{(x+1)^2}, \quad j(x) = \frac{x^6-5x^5+5x^4+10x^3-1}{x+3}$$

Определение

Простейшими рациональными дробями называются дроби следующих четырех типов:

- I тип: $\dfrac{A}{px+q}$
- II тип: $\dfrac{A}{(px+q)^k}, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \geqslant 2$
- III тип: $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \ a > 0, \ b^2-4ac < 0$
- IV тип: $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}, \ a > 0, \ b^2-4ac < 0, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \geqslant 2$

A, B, a, b, c, p, q − вещественные числа.

Правильные рациональные функции

Теорема

Любую **правильную** рациональную функцию $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, у которой

$$Q(x) = (x+a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x+a_i)^{k_i}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_jx+q_j)^{n_j}$$

можно представить в виде суммы простейших дробей по правилу:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x+a_1}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{(x+a_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{A_{i1}}{x+a_i}+\ldots+\frac{A_{ik_i}}{(x+a_i)^{k_i}}+$$
$$+\frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{C_{1n_1}x+D_{1n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}+\ldots+\frac{C_{j1}x+D_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\ldots+\frac{C_{jn_j}x+D_{jn_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{n_j}}$$

$A_{11},\ldots,A_{ik_i}$, $C_{11},\ldots C_{jn_j}$, $D_{11},\ldots D_{jn_j}$ – числа, которые определяются **методом неопределенных коэффициентов** или **методом частных значений**.

! Число простейших дробей равно числу всех простейших множителей в знаменателе; число неопределенных коэффициентов равно степени многочлена в знаменателе $Q(x)$.

Примеры

1. Разложим рациональную функцию $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+1}{\cancel{(x-1)(x-2)(x-3)}} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3} = $$
$$= \frac{A_1(x-2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x-2)}{\cancel{(x-1)(x-2)(x-3)}} \qquad (1)$$

У первой и последней дробей знаменатели одинаковые, следовательно, числители должны быть равны:

$$x^2+1 = A_1(x-2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x-2) \qquad (2)$$

Для нахождения чисел A_1, A_2, A_3 воспользуемся **методом частных значений**. Для того, чтобы найти A_1, в правой части формулы (2) нужно избавиться от второго и третьего слагаемых; этого можно добиться, подставив в правую и левую части формулы (2) $x=1$:

$$1^2+1 = A_1(1-2)(1-3)+A_2\cdot 0+A_3\cdot 0 \Longrightarrow 2 = A_1\cdot 2 \Longrightarrow A_1 = 1$$

Для того, чтобы найти A_2, подставим в правую и левую части формулы (2) $x=2$ и найдем, что $A_2=-5$; после подстановки $x=3$ мы обнаружим, что $A_3=5$. Подставляя найденные значения A_1, A_2, A_3 в (1), получим:

$$\boxed{\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{5}{x-3}} \qquad (3)$$

2. Разложим рациональную функцию $\dfrac{x}{(x+1)^2(x+2)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{\cancel{(x+1)^2(x+2)}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2}{\cancel{(x+1)^2(x+2)}} \tag{4}$$

Сократим знаменатели первой и последней дробей и приравняем числители:

$$x = A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2 \tag{5}$$

Воспользуемся **методом неопределенных коэффициентов**. Для этого в правой части равенства (5) раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями (приведем подобные слагаемые):

$$x = (A+C)x^2 + (3A+B+2C)x + 2A + 2B + C \tag{6}$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (6); отсутствие x^2 в левой части этого равенства говорит о том, что коэффициент перед x^2 равен нулю. Получаем систему уравнений и решаем ее:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B+2C=1 \\ 2A+2B+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-A \\ 3A+B-2A=1 \\ 2A+2B-A=0 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-1 \\ A=2 \\ C=-2 \end{cases}$$

Подставим найденные значения A, B, C в (4):

$$\boxed{\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2}} \tag{7}$$

3. Разложим рациональную функцию $\dfrac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+10x-10}{\cancel{x(x^2+2x+2)}} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Mx+N)x}{\cancel{x(x^2+2x+2)}} \tag{8}$$

Приравняем числители:

$$x^2+10x-10 = A(x^2+2x+2)+(Mx+N)x$$

В правой части раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x^2+10x-10 = (A+M)x^2 + (2A+N)x + 2A$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и решим получившуюся систему уравнений:

$$\begin{cases} A+M=1 \\ 2A+N=10 \\ 2A=-10 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-5 \\ M=6 \\ N=20 \end{cases}$$

Подставим найденные числа A, M, N в (8):

$$\boxed{\frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)} = -\frac{5}{x} + \frac{6x+20}{x^2+2x+2}} \tag{9}$$

Неправильные рациональные функции

Для того, чтобы неправильную рациональную функцию разложить на сумму простейших дробей, сначала необходимо представить ее в виде суммы обычного полинома и правильной рациональной функции. Этого можно добиться, разделив полином, находящийся в числителе на полином из знаменателя. Приведем примеры процедуры деления полиномов.

Примеры

1. Разделить полином $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ на полином $B(x) = x^2 - 3x + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 \\ 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ \hline 2x^2 + 3x + 9 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} 3x^3 + \ \ 0 \ \ - 7x \\ 3x^3 - 9x^2 + 3x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} 9x^2 + 10x + 5 \\ 9x^2 - 27x + 9 \end{array} & \\
\hline
17x - 4 &
\end{array}
$$

$$
\frac{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 3x + 1} = \underbrace{2x^2 + 3x + 9}_{Q(x)} + \frac{\overbrace{17x - 4}^{R(x)}}{x^2 - 3x + 1}
$$

2. Разделить полином $A(x) = x^5 - 7x^3 - 12x + 18$ на полином $B(x) = x^3 - 2x^2 - 6$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^5 + 0 - 7x^3 + 0 - 12x + 18 \\ x^5 - 2x^4 + 0 - 6x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - 2x^2 - 6 \\ \hline x^2 + 2x - 3 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 12x \\ 2x^4 - 4x^3 + \ \ 0 \ \ - 12x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} 3x^3 + 6x^2 + 0 + 18 \\ 3x^3 + 6x^2 + 0 + 18 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$
\frac{x^5 - 7x^3 - 12x + 18}{x^3 - 2x^2 - 6} = x^2 + 2x - 3
$$

Пример

Представим функцию $\dfrac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6}$ в виде суммы полинома и простейших дробей. **Так как степень полинома в числителе больше степени полинома в знаменателе, необходимо разделить полином** $x^3 + x^2 + 3x + 4$ **на полином** $x^2 + x - 6$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 3x + 4 \\ x^3 + x^2 - 6x \end{array} & \begin{array}{l} x^2 + x - 6 \\ \hline x \end{array} \\
\hline
9x + 4 &
\end{array}
$$

Получаем:

$$
\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6} = x + \frac{9x + 4}{x^2 + x - 6}
$$

Разложим на множители полином $x^2 + x - 6$ по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \iff x_1 = 2,\ \ x_2 = -3 \implies x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \implies \frac{9x+4}{x^2+x-6} = \frac{9x+4}{(x-2)(x+3)}$$

Разложим функцию $\dfrac{9x+4}{(x-2)(x+3)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{9x+4}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \iff \frac{9x+4}{\cancel{(x-2)(x+3)}} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{\cancel{(x-2)(x+3)}} \iff 9x+4 = A(x+3)+B(x-2)$$

Воспользуемся методом частных значений.

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \implies 9\cdot(-3) + 4 = A(-3+3) + B(-3-2) \Leftrightarrow -23 = -5B \Leftrightarrow B = \frac{23}{5}$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \implies 9\cdot 2 + 4 = A(2+3) + B(2-2) \Leftrightarrow 22 = 5A \Leftrightarrow A = \frac{22}{5}$$

Тогда

$$\frac{9x+4}{x^2+x-6} = \frac{22/5}{x-2} + \frac{23/5}{x+3}$$

Ответ: $\dfrac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6} = x + \dfrac{22/5}{x-2} + \dfrac{23/5}{x+3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Разложите на сумму простейших дробей

1. $\dfrac{2x+5}{x^2-9x+20}$
2. $\dfrac{3x+10}{(x-1)(x+2)(x+4)}$
3. $\dfrac{x^3}{x^2-9x+20}$
4. $\dfrac{x^2+10x+24}{(x-2)^2(x+1)}$
5. $\dfrac{x+15}{(x^2+4)(x^2+9)}$
6. $\dfrac{4x^2+2}{(x^2+1)(x+1)^2}$