Занятие 1.3 Показательная и логарифмическая функции. Свойства логарифмов

Показательная функция

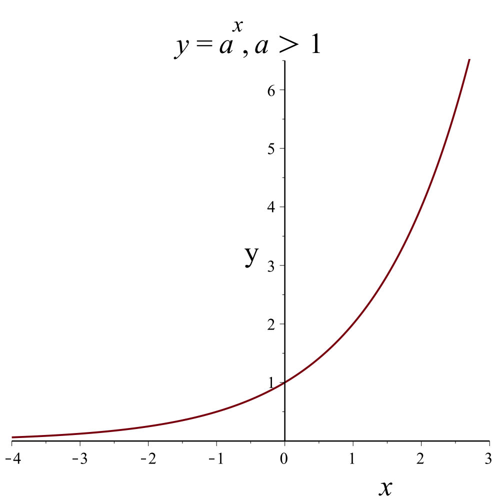
Определение

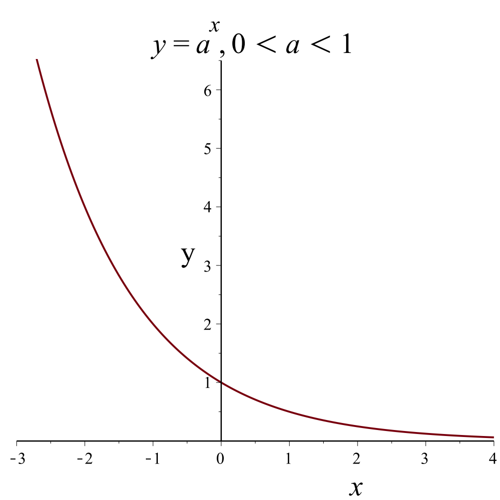
Показательная функция – это функция, которая имеет вид a^x, где a − фиксированное число, $a > 0,\ a \neq 1$; x − переменная.

Таблица 1: Свойства функции a^x

	$a > 1$	$0 < a < 1$
монотонность	возрастает	убывает
область определения	$(-\infty; +\infty)$	
область значений	$(0; +\infty)$	
производная	$a^x \cdot \ln a$	
первообразная	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	

Ниже изображены графики функций a^x.





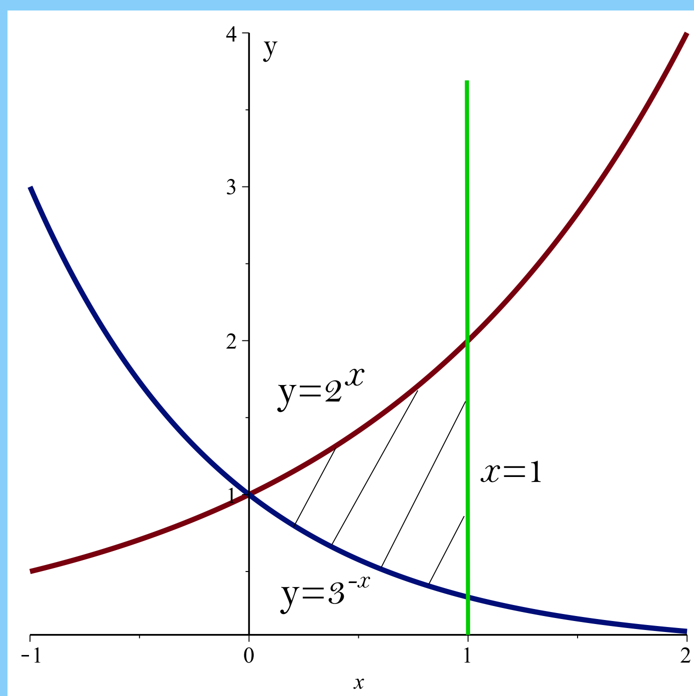
Пример

Вычислим площадь плоской фигуры, расположенной между графиками функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и прямой $x = 1$. График функции $x = 1$ – прямая, параллельная оси ординат, проходящая через точку с координатами $(1; 0)$. Для построения графиков функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ создадим 2 таблицы, в верхней строке каждой из которых будем записывать значения аргумента, а в нижней – значения функции:

x	-1	0	1	2
2^x	0,5	1	2	4

x	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Отметим точки, координаты которых указаны в таблицах, на координатной плоскости и соединим их линиями:



Нам необходимо найти площадь заштрихованной фигуры. Воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b (f_{\text{выше}}(x) - f_{\text{ниже}}(x))\,dx, \text{ где } \begin{array}{l} f_{\text{выше}}(x) \ - \text{ функция, график которой расположен выше} \\ f_{\text{ниже}}(x) \ - \text{ функция, график которой расположен ниже} \end{array} \quad (1)$$

В нашем случае $f_{\text{выше}}(x) = 2^x,\ f_{\text{ниже}}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ a = 0,\ b = 1$:

$$S = \int_0^1 \left(2^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right) dx = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся формулой} \\ \text{первообразной показательной функции} \\ \text{из таблицы 1} \end{array} \right| = \left(\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{2}{3\ln 3}$$

Мы воспользовались тем, что $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$ (см. свойства логарифмов ниже).

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте графики функций

   (a) $y = 3^x$

   (b) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

2. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

   (a) $y = 3^x,\ y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x,\ x = 2$

   (b) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x,\ y = 4^x,\ x = -1$

Логарифм числа

Определение

Логарифм положительного числа x **по основанию** a – это показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить x:

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$

По определению $a > 0,\ a \neq 1$.

Логарифм по основанию e называют **натуральным логарифмом** и обозначают $\ln x \equiv \log_e x$.

Логарифм по основанию 10 называют **десятичным логарифмом** и обозначают $\lg x \equiv \log_{10} x$.

Примеры

1. $\log_2 8 = 3$, т.к. $8 = 2^3$
2. $\log_3 81 = 4$, т.к. $81 = 3^4$
3. $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$, т.к. $25 = \sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$
4. $\log_9 \dfrac{1}{9} = -1$, т.к. $\dfrac{1}{9} = 9^{-1}$

Свойства логарифмов

В логарифме $\log_a x$ аргумент x должен быть положительным ($x > 0$); основание a должно быть больше нуля и НЕ равно 1 ($a > 0,\ a \neq 1$).

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$
2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a |x| + \log_a |y|$
3. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$
4. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$
5. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
6. $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \cdot \log_a x$
7. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
8. $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$
9. $\log_a 1 = 0$
10. $\log_a a = 1$
11. $\boxed{x = a^{\log_a x}}$

Примеры

Вычислим значения выражений:

1. $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2 = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся} \\ \text{свойством 3} \end{array} \right| = \log_{\frac{1}{8}} 8 = -1$

2. $\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{3} = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся} \\ \text{свойством 5} \end{array} \right| = \log_{\sqrt{3}} \frac{\cancel{6}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \log_{\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{3}} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = \left| \begin{array}{c} \text{воспольз.} \\ \text{свойством 2} \end{array} \right| = 1$

3. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\sqrt{2}} = \log_{2^{-1}} \frac{1}{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \log_{2^{-1}} \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = \log_{2^{-1}} 2^{-\frac{5}{2}} = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся} \\ \text{свойствами 7 и 8} \end{array} \right| = \frac{-\frac{5}{2}}{-1} \log_2 2 = \frac{5}{2}$

4. $\sqrt[3]{81^{\log_9 6} - 7^{\log_7 9}} = \sqrt[3]{9^{2\log_9 6} - 7^{\log_7 9}} = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся} \\ \text{свойством 5} \\ \text{в обратную сторону} \end{array} \right| = \sqrt[3]{9^{\log_9 6^2} - 7^{\log_7 9}} =$
$= \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся} \\ \text{свойством 11} \end{array} \right| = \sqrt[3]{36 - 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите

1. $\log_{144} 3 + \log_{144} 4$
2. $\log_{216} 2 + \log_{216} 3$
3. $\log_{\frac{1}{12}} 3 + \log_{\frac{1}{12}} 36$
4. $\log_{\sqrt{2}} 2$
5. $\log_{3\sqrt{2}} 18$
6. $\lg \frac{1}{100\sqrt{10}}$
7. $\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 14$
8. $\log_{\frac{2}{3}} 32 - \log_{\frac{2}{3}} 243$
9. $\log_{0,2} 40 - \log_{0,2} 8$
10. $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}}$
11. $(0,3)^{3\log_{0,3} 6}$
12. $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5}$

Логарифмическая функция

Если каждому положительному числу x поставить в соответствие число y, равное логарифму x по основанию a, то мы получим **логарифмическую функцию**:

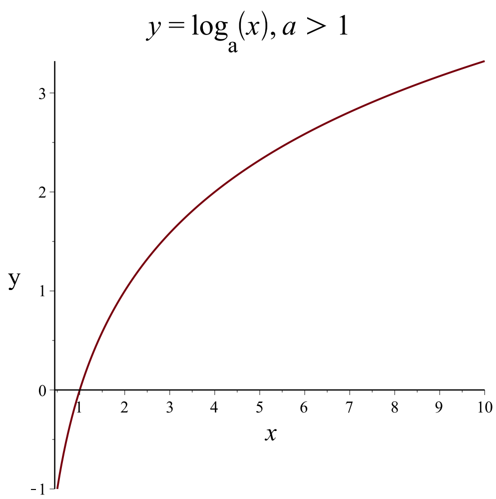
$$y = \log_a x$$

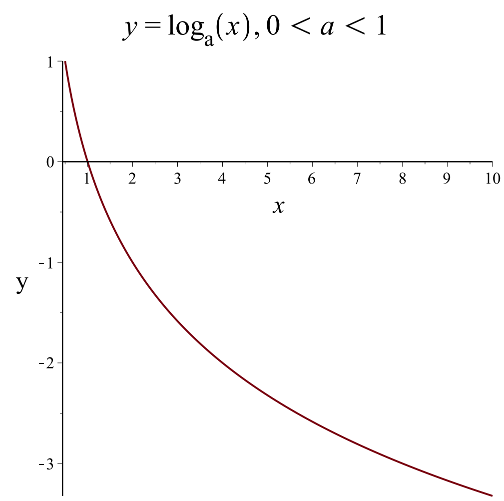
Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной по отношению к показательной функции $x = a^y$.

Таблица 2: Свойства функции $\log_a x$

	$a > 1$	$0 < a < 1$
монотонность	возрастает	убывает
область определения	$(0; +\infty)$	
область значений	$(-\infty; +\infty)$	
производная	$\dfrac{1}{x \ln a}$	
первообразная	$\dfrac{x(\ln x - 1)}{\ln a}$	

Ниже изображены графики функций $\log_a x$.





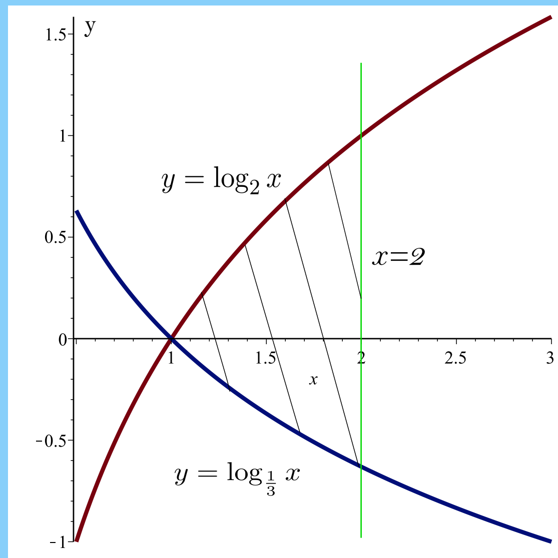
Пример

Вычислим площадь плоской фигуры, расположенной между графиками функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и прямой $x = 2$. График функции $x = 2$ – прямая, параллельная оси ординат, проходящая через точку с координатами $(2; 0)$. Для построения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ создадим 2 таблицы, в верхней строке каждой из которых будем записывать значения аргумента, а в нижней – значения функции:

x	0,5	1	2	4
$\log_2 x$	-1	0	1	2

x	$\dfrac{1}{3}$	1	3	9
$\log_{\frac{1}{3}} x$	1	0	-1	-2

Отметим точки, координаты которых указаны в таблицах, на координатной плоскости и соединим их линиями:



Нам необходимо найти площадь заштрихованной фигуры. Воспользуемся формулой

$$S = \int\limits_a^b \left(f_{\text{выше}}(x) - f_{\text{ниже}}(x)\right) dx, \text{ где } \begin{array}{l} f_{\text{выше}}(x) \ - \ \text{функция, график которой расположен выше} \\ f_{\text{ниже}}(x) \ - \ \text{функция, график которой расположен ниже} \end{array} \qquad (2)$$

В нашем случае $f_{\text{выше}}(x) = \log_2 x, \ f_{\text{ниже}}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, \ a = 1, \ b = 2$:

$$S = \int\limits_1^2 \left(\log_2 x - \log_{\frac{1}{3}} x\right) dx = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся формулой} \\ \text{первообразной логарифмической функции} \\ \text{из таблицы 2} \end{array} \right| = \left(\frac{x(\ln x - 1)}{\ln 2} - \frac{x(\ln x - 1)}{\ln \frac{1}{3}}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2(\ln 2 - 1)}{\ln 2} - \frac{1(\ln 1 - 1)}{\ln 2}\right) - \left(\frac{2(\ln 2 - 1)}{\ln \frac{1}{3}} - \frac{1(\ln 1 - 1)}{\ln \frac{1}{3}}\right) = \frac{(2\ln 2 - 1)\ln 6}{\ln 2 \ln 3}$$

Мы воспользовались тем, что $\ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3$ (свойство 5 логарифмов), а также тем, что $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$ (свойство 1 логарифмов).

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте графики функций

   (a) $y = \log_3 x$ (b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

2. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

   (a) $y = \log_3 x, \ y = \log_{\frac{1}{2}} x, \ x = 3$ (b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x, \ y = \log_4 x, \ x = 0,5$