Занятие 1.2 Преобразование тригонометрических выражений. Обратные тригонометрические функции.

Часто используемые тригонометрические формулы

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos 2x\Big)$
3. $\cos^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos 2x\Big)$
4. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
5. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
6. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
7. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
9. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$
10. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$
11. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$

Примеры

1. Упростите выражение $\frac{\sin 6t}{\cos^2 3t}$.

$$\frac{\sin 6t}{\cos^2 3t} = \left|\begin{array}{c}\text{в числителе}\\ \text{воспользуемся формулой 4}\end{array}\right| = \frac{2\sin 3t \cancel{\cos 3t}}{\cancel{\cos^2 3t}} = \frac{2\sin 3t}{\cos 3t} = 2\operatorname{tg} 3t$$

2. Упростите выражение $\frac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} - \sin t$.

$$\frac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} - \sin t = \left|\begin{array}{c}\text{в числителе}\\ \text{воспользуемся формулой 5}\end{array}\right| = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos t - \sin t} - \sin t =$$

$$= \frac{\cancel{(\cos t - \sin t)}(\cos t + \sin t)}{\cancel{\cos t - \sin t}} - \sin t = \cos t + \sin t - \sin t = \cos t$$

3. Упростите выражение $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$.

$$\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \left|\ \text{воспользуемся формулой 11}\ \right| =$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[\cos\left(\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right) + \cos\left(\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right)\right] =$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[\cos(-2x) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \left|\ \begin{array}{c}\text{так как } \cos - \text{чётная функция}\\ \cos(-2x) = \cos(2x)\end{array}\ \right| = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[\cos(2x) - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4} = \left|\ \text{воспользуемся формулой 5}\ \right| = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) - \frac{1}{4} =$$

$$= \cancel{\sin^2 x} + \frac{1}{2} - \cancel{\sin^2 x} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Задачи для самостоятельного решения

Упростите выражение

1. $2\sin t \sin 2t + \cos 3t$
2. $4\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$
3. $\dfrac{\cos(\pi - t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(2\pi - t) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)}$
4. $\dfrac{cos2t}{\cos t - \sin t} - \sin t$
5. $\dfrac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$
6. $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$

Обратные тригонометрические функции

Арксинус

Определение

Пусть $-1 \leqslant a \leqslant 1$. **Арксинусом** числа a называют число t из отрезка от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен a:

$$\begin{cases}\arcsin a = t\\ a \in [-1; 1]\end{cases} \iff \begin{cases}\sin t = a\\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Примеры

1. $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$
2. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, т.к. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, т.к. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
4. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, т.к. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Если $a \in [-1; 1]$, то существует единственный арксинус числа a.
2. Если $a > 1$ или $a < -1$, то арксинус числа a НЕ существует и запись $\arcsin a$ не имеет смысла. (Например, записи $\arcsin 5, \arcsin\sqrt{3}, \arcsin(-10)$ смысла не имеют.)

Из определения арксинуса следует, что

$$\text{если } a \in [-1; 1], \text{ то } \sin(\arcsin a) = a, \quad \text{если } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \arcsin(\sin t) = t \qquad (1)$$

Примеры

1. $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{2}{3}$
2. $\arcsin(\sin(1)) = 1$

Часто используют следующие формулы, справедливые при $a \in [-1; 1]$:

- $\sin(\arcsin a) = a$
- $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$
- $\operatorname{tg}(\arcsin a) = \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2}}, \ a \neq \pm 1$
- $\operatorname{ctg}(\arcsin a) = \dfrac{\sqrt{1 - a^2}}{a}, \ a \neq 0$

Примеры

- $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$
- $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \sqrt{2}$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите

1. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$
2. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{19}}\right)\right)$
3. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)\right)$
4. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(\frac{2}{9}\right)\right)$

Арккосинус

Определение

Пусть $-1 \leqslant a \leqslant 1$. **Арккосинусом** числа a называют число t из отрезка от 0 до π, косинус которого равен a:

$$\begin{cases} \arccos a = t \\ a \in [-1;1] \end{cases} \iff \begin{cases} \cos t = a \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$$

Примеры

1. $\arccos 1 = 0$, т.к. $\cos 0 = 1$
2. $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, т.к. $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\arccos(-1) = \pi$, т.к. $\cos(\pi) = -1$
4. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, т.к. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

!

1. Если $a \in [-1;1]$, то существует единственный арккосинус числа a.
2. Если $a > 1$ или $a < -1$, то арккосинус числа a НЕ существует и запись $\arccos a$ не имеет смысла. (Например, записи $\arccos(-2), \arccos\sqrt{7}, \arccos 100$ смысла не имеют.)

Из определения арккосинуса следует, что

$$\text{если } a \in [-1;1], \text{ то } \cos(\arccos a) = a, \quad \text{если } t \in [0;\pi], \text{ то } \arccos(\cos t) = t \tag{2}$$

Примеры

1. $\cos\left(\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right) = -\dfrac{3}{5}$
2. $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{5\pi}{6}$

Часто используют следующие формулы, справедливые при $a \in [-1;1]$:

- $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$
- $\cos(\arccos a) = a$
- $\operatorname{tg}(\arccos a) = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, $a \neq 0$
- $\operatorname{ctg}(\arccos a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, $a \neq \pm 1$

Примеры

- $\sin\left(\arccos\left(\dfrac{1}{7}\right)\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$
- $\cos\left(\arccos\left(\dfrac{1}{7}\right)\right) = \dfrac{1}{7}$
- $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\dfrac{1}{7}\right)\right) = 4\sqrt{3}$
- $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(\dfrac{1}{7}\right)\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите

1. $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$
2. $\cos\left(\arccos 0\right)$
3. $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$
4. $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(\frac{3}{7}\right)\right)$

Арктангенс

Определение

Пусть a – любое вещественное число. **Арктангенсом** числа a называют число t из интервала от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен a:

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} a = t \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} t = a \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Примеры

1. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$
2. $\operatorname{arctg} 0 = 0$, т.к. $\operatorname{tg} 0 = 0$
3. $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$, т.к. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
4. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, т.к. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

! Если $a \in \mathbb{R}$, то существует единственный арктангенс числа a. Запись $\operatorname{arctg} a$ имеет смысл для любых значений a.

Из определения арктангенса следует, что

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a \ \text{ для любых } a, \quad \text{если } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ то } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t \tag{3}$$

Примеры

1. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 1000\right) = 1000$
2. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = -\frac{\pi}{12}$

Часто используют следующие формулы, справедливые для любых a:

- $\sin(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
- $\cos(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{1}{a},\ a \neq 0$

Примеры

- $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$
- $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{11}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
- $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 10\right) = 10$
- $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} 100\right) = 0,01$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите

1. $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{23}\right)$
2. $\cos\left(\operatorname{arctg} 0,3\right)$
3. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{10}\right)\right)$
4. $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} 1,5\right)$

Арккотангенс

Определение

Пусть a – любое вещественное число. **Арккотангенсом** числа a называют число t из интервала от 0 до π, котангенс которого равен a:

$$\begin{cases} \operatorname{arcctg} a = t \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{ctg} t = a \\ t \in (0;\pi) \end{cases}$$

Примеры

1. $\operatorname{arcctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, т.к. $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$
2. $\operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, т.к. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
3. $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$, т.к. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$
4. $\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, т.к. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

! Если $a \in \mathbb{R}$, то существует единственный арккотангенс числа a. Запись $\operatorname{arcctg} a$ имеет смысл для любых значений a.

Из определения арккотангенса следует, что

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a \ \text{ для любых } a, \quad \text{если } t \in (0;\pi), \text{ то } \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t \tag{4}$$

Примеры

1. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-512)) = -512$
2. $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{78\pi}{79}\right)\right) = \dfrac{78\pi}{79}$

Часто используют следующие формулы, справедливые для любых a:

- $\sin(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
- $\cos(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{1}{a}, \ a \neq 0$
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$

Примеры

- $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{13}}\right)\right) = \sqrt{\dfrac{13}{14}}$
- $\cos\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{19}\right) = \dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-8)) = -0,125$
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-16)) = -16$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите

1. $\sin\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{10})\right)$
2. $\cos(\operatorname{arcctg} 2)$
3. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-0,5))$
4. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 15000)$