Занятие 1.1 Тождественные преобразования алгебраических выражений

Определение

Алгебраическое выражение – запись, состоящая из чисел, букв, скобок, знаков сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения корня.

Примеры

1. $-7x^2 + 3\sqrt{y} - (a+b)^3$
2. $\dfrac{\sqrt{y} - \sqrt[3]{x}}{x^5 - 8b}$
3. $2 - \dfrac{17}{\sqrt{x^2 - 3}} - 9yz$

Определение

Два алгебраических выражения называются **тождественно равными**, если они принимают одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях переменных, входящих в них.

Определение

Тождество — алгебраическое равенство, правая и левая части которого тождественно равны.

Примеры

1. $3(x-7) = 3x - 21$
2. $-x^3 - 3 + 10 = -x^3 + 7$

Определение

Тождественное преобразование алгебраического выражения — замена этого выражения другим, тождественно равным ему.

Определение

Упростить алгебраическое выражение — значит заменить его на тождественно равное, но как можно более простое по записи.

Для упрощения алгебраических выражений чаще всего необходимо использовать свойства степеней, формулы сокращенного умножения, разложение квадратного трехчлена на множители.

1. Использование свойств степеней

Определение

Если n – натуральное число и $n \geqslant 2$, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

a^n – степень; a – основание степени; n – показатель степени.

$$\boxed{a^1 = a \ (a \ \text{– любое число})} \qquad \boxed{a^0 = 1 \ (a \neq 0)}$$

Если n – натуральное число и $n \geqslant 1$, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Примеры

1. $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
2. $8^1 = 8$
3. $(-1,23)^0 = 1$
4. $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$
5. $y^1 = y$
6. $x^0 = 1$
7. $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$
8. $z^{-3} = \dfrac{1}{z^3}$

Свойства степеней

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
3. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
4. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

Пример

Упростите выражение $\dfrac{(x^3)^3 \cdot (x^{-2})^3 \cdot (y^2)^6}{(y^7)^2}$.

Решение:

$$\frac{(x^3)^3 \cdot (x^{-2})^3 \cdot (y^2)^6}{(y^7)^2} = \frac{x^9 \cdot x^{-6} \cdot y^{12}}{y^{14}} = x^3 \cdot y^{-2} = \frac{x^3}{y^2}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Упростите выражение

   (a) $\dfrac{y^7y^{-5}}{y^2}$

   (b) $(-ab)^3(-ax)^2(bx)^4$

   (c) $\dfrac{(x^2)^3y}{y^6}$

   (d) $\dfrac{z^3z^{-2}}{z^5}\cdot\dfrac{z^{11}z^2}{z^{-3}}$

   (e) $(x^4)^3\cdot(x^6)^2$

   (f) $(t^9)^{-2}\cdot(t^3)^6$

2. Вычислите

   (a) $\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^{21}:\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^{17}$

   (b) $\dfrac{(-0,3)^6\cdot(-0,3)}{(-0,3)^4}$

   (c) $\dfrac{5^6\cdot 125}{25^4}$

   (d) $\dfrac{2\cdot 3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^9}$

   (e) $\dfrac{1,2^2-(2,9)^0\cdot 0,4+1^7\cdot 0,06}{3,06-1,4^2\cdot(3,3)^0}$

   (f) $\left((-12)^2\right)^0-5^3\cdot\dfrac{1}{5}-6^2\cdot 0,25$

2. Использование формул сокращенного умножения

Формулы сокращенного умножения

1. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
2. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
3. $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
4. $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
5. Бином Ньютона:
   $$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}y^k,$$
   $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n;\ 0!=1,\quad n\in\mathbb{N}$
6. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
7. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
8. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
9. $x^n-y^n=$
   $=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$
   $n\in\mathbb{N}$
10. $x^{2n+1}+y^{2n+1}=$
    $=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+\ldots-xy^{2n-1}+y^{2n}),$
    $n\in\mathbb{N}$

Примеры

1. Упростите выражение $(5m-2)(5m+2)-(5m-4)^2-40m$

Решение:

$$(5m-2)(5m+2)-(5m-4)^2-40m=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{формулами 6 и 2}\end{array}\right|=25m^2-4-(25m^2-40m+16)-40m=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{раскроем скобки,}\\ \text{приведем подобные слагаемые}\end{array}\right|=\cancel{25m^2}-4-\cancel{25m^2}+\cancel{40m}-16-\cancel{40m}=-20$$

2. Упростите выражение $127 + (5c-3)(25c^2+15c+9)$ и найдите его значение при $c = -1\dfrac{1}{5}$.

Решение:

$$127 + (5c-3)(25c^2+15c+9) = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся формулой 7;} \\ \text{в нашем случае } x = 5c,\ y = 3 \end{array} \right| = 127 + (5c)^3 - 3^3 = 100 + 125c^3$$

Подставим в последнее выражение $c = -1\dfrac{1}{5} = -\dfrac{6}{5}$:

$$100 + 125\left(-\frac{6}{5}\right)^3 = 100 - \cancel{125} \cdot \frac{216}{\cancel{125}} = 100 - 216 = -116$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Упростите выражение

   (a) $(2a-b)(2a+b)+(b-c)(b+c)+(c-2a)(c+2a)$

   (b) $(3b+2)^2 + (7+3b)(7-3b) - 12b$

2. Упростите выражение и найдите его значение

   (a) $(3t-8)^2 + (4t+6)^2 + 100t$ при $t = -2$

   (b) $64 - (4-3a)(16+12a+9a^2)$ при $a = -\dfrac{2}{3}$

3. Решите уравнение

   (a) $(3-2x)^3 = -8x^3 + 9x$

   (b) $(1+x)^3 - x^3 = x^2$

3. Использование разложения квадратного трехчлена на множители

Разложение квадратного трехчлена на множители осуществляется по формуле:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2), \ \text{ где } x_1, x_2 \ \text{ – корни уравнения } ax^2+bx+c=0} \qquad (1)$$

Примеры

1. Разложим на множители трехчлен $x^2 - 4x - 5$. Для этого решим уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$:

   $D = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot(-5) = 16+20 = 36;\ \ x_1 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\cdot1} = \dfrac{4+6}{2} = 5,\ x_2 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\cdot1} = \dfrac{4-6}{2} = -1$

   Воспользуемся формулой (1):

   $$x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$$

   Мы учли, что в нашем случае $a = 1$.

2. Разложим на множители трехчлен $5x^2+2x+1$. Для этого решим уравнение $5x^2+2x+1=0$:

$$D = 2^2 - 4\cdot 5\cdot 1 = 4 - 20 = -16 \Longrightarrow \text{вещественных корней нет}$$

Трехчлен $5x^2+2x+1$ разложить на множители нельзя (оставаясь в поле вещественных чисел).

3. Упростим выражение $\dfrac{x^2-3x+2}{(2x^2-x-1)(x^2-4)}$. Для этого разложим на множители квадратные трехчлены x^2-3x+2 и $2x^2-x-1$.

   (a) Решим уравнение $x^2-3x+2=0$:

   $$D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1;\;\; x_1 = \frac{3+1}{2} = 2,\; x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

   Тогда $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

   (b) Решим уравнение $2x^2-x-1=0$:

   $$D = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9;\;\; x_1 = \frac{1+3}{4} = 1,\; x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

   Тогда $2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

   Подставим полученные разложения в исходное выражение:

$$\frac{x^2-3x+2}{(2x^2-x-1)(x^2-4)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{2\cancel{(x-1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-4)} = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой}\\ \text{сокращенного умножения 6}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cancel{(x-2)}(x+2)} = \left|\begin{array}{c}\text{занесем множитель 2}\\ \text{в первую скобку}\end{array}\right| = \frac{1}{(2x+1)(x+2)}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложите на множители трехчлен

   (a) x^2+x-6 (b) $3x^2-5x+2$ (c) $-14-2x^2-3x$

2. Упростите выражение

   (a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$

   (b) $\dfrac{(10x^2-11x-6)(x^2-18x+77)}{-2x^2+x+3}$

   (c) $\dfrac{(x^2-7x+6)(-x^2-x+2)}{(1-x^2)(12x^2-13x-4)}$

   (d) $\dfrac{(x^2+5x-24)(14-x^2+5x)}{(x^2+7x+10)(64-x^2)}$

