Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
Текст 2.1

Аннотация

Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Координаты точки. Связь координат вектора с координатами его начала и конца. Формулы для расстояния между двумя точками и деления отрезка в данном отношении. Различные виды уравнения прямой на плоскости: прямая с угловым коэффициентом, параметрические уравнения, каноническое уравнение, уравнение в отрезках, общее уравнение. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Нахождение угла между прямыми.

1 Координаты точки

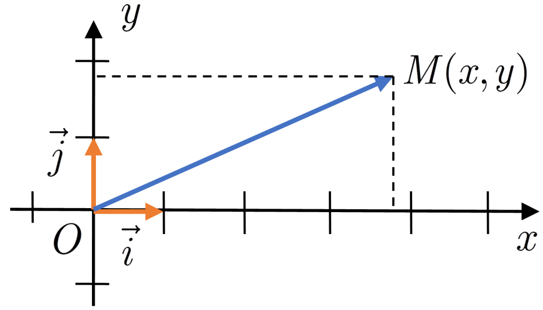
На плоскости **декартова прямоугольная система координат** Oxy задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми – осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти оси называют **осями координат**, точку их пересечения O – **началом координат**. Одну из осей называют **осью абсцисс** (осью Ox), другую – **осью ординат** (осью Oy). Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}$).

Рассмотрим произвольную точку M в системе координат Oxy. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называют **радиус-вектором** точки M.

Определение

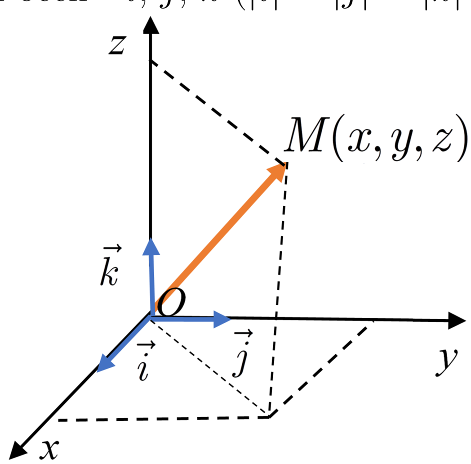
Координатами точки M в системе координат Oxy называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Если $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, то координаты точки записываются так $M(x, y)$. Число x называется **абсциссой точки** M, а число y – **ординатой точки** M.



Числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

В пространстве декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ задается тремя взаимно перпендикулярными осями: **осью абсцисс** (осью Ox), **осью ординат** (осью Oy) и **осью аппликат** (осью Oz). Единичные векторы осей - $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$).



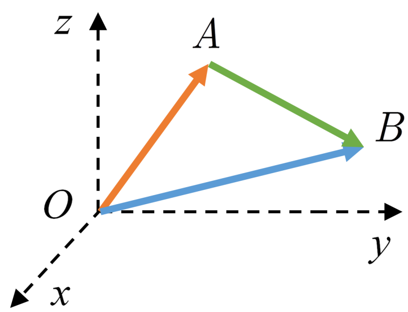
Рассмотрим некоторые приложения метода координат:

1. Связь координат вектора с координатами его начала и конца

Пусть даны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Радиус-векторы этих точек имеют такие же координаты: $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$,

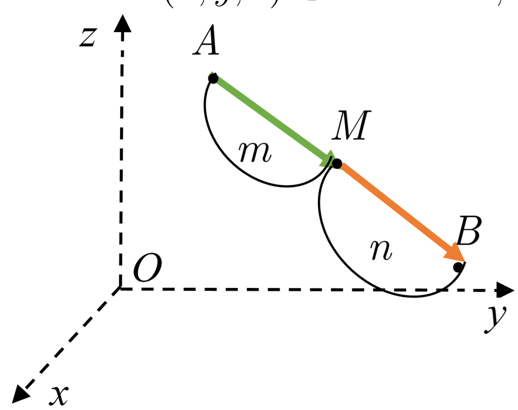
$\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Требуется разделить отрезок AB в заданном отношении $\lambda = m/n$, т.е. найти координаты точки $M(x, y, z) \in AB$ такой, что $AM/MB = \lambda$.



Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ и $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = (\lambda + 1) \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов слева и справа и выражая x, y, z, получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

3. Расстояние между двумя точками (длина отрезка)

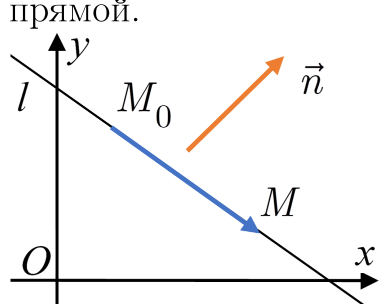
Расстояние d между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$, т.е.

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2 Уравнения прямой на плоскости

2.1 Уравнение прямой с заданным нормальным векотором

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую l. Будем предполагать, что точка $M_0(x_0, y_0) \in l$, а ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен этой прямой.



При таких условиях произвольная точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ ортогонален вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0$. Отсюда получаем **уравнение прямой с заданным нормальным вектором**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{1}$$

Определение

Вектор $\vec{n} = (A, B)$ называют **нормальным вектором прямой**.

2.2 Общее уравнение прямой

Если в уравнении (1) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить **общее уравнение прямой на плоскости**

$$Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Некоторые *частные случаи* общего уравнения прямой:

1) если $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, то получается прямая $y = -C/B$, параллельная оси Ox;

2) если $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$, то получается прямая $x = -C/A$, параллельная оси Oy;

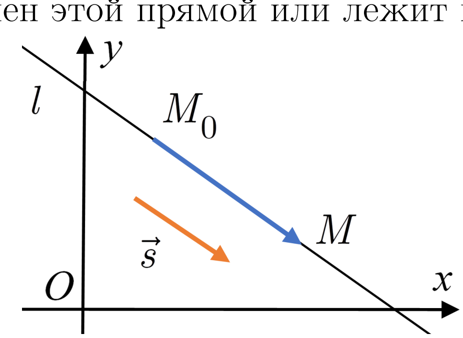
3) если $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$, то прямая $Ax + By = 0$ проходит через начало координат;

4) если $A = 0, C = 0, B \neq 0$, то получаем уравнение оси $Ox\ y = 0$.

5) если $B = 0, C = 0, A \neq 0$, то получаем уравнение оси $Oy\ x = 0$.

2.3 Каноническое уравнение прямой

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую l. Будем предполагать, что точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит l, а ненулевой вектор $\vec{s} = (m, p)$ параллелен этой прямой или лежит на ней.



Произвольная точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ коллинеарен вектору $\vec{s}$, т.е. их координаты пропорциональны, что дает **каноническое уравнение прямой**:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}. \tag{3}$$

Определение

Вектор $\vec{s} = (m, p)$ называют **направляющим вектором прямой**.

2.4 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая l задается двумя точками:

$$M_1(x_1, y_1) \in l \text{ и } M_2(x_2, y_2) \in l.$$

Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является направляющим вектором прямой l. Составим уравнение прямой l, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$. В результате получаем **уравнение прямой, проходящей через две точки**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

2.5 Уравнение прямой в отрезках

Составим уравнение прямой l, проходящей через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, являющиеся точками пересечения прямой с осями координат.

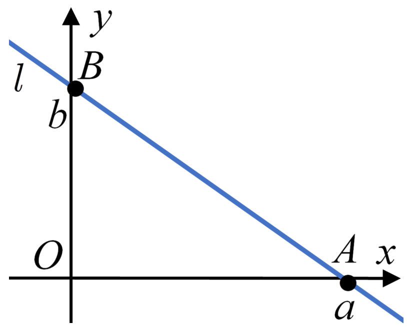
Для этого воспользуемся уравнением (4):

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}.$$

Откуда получаем **уравнение прямой в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{5}$$

Числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.



2.6 Параметрические уравнения прямой

Положим в уравнении (3)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = t,$$

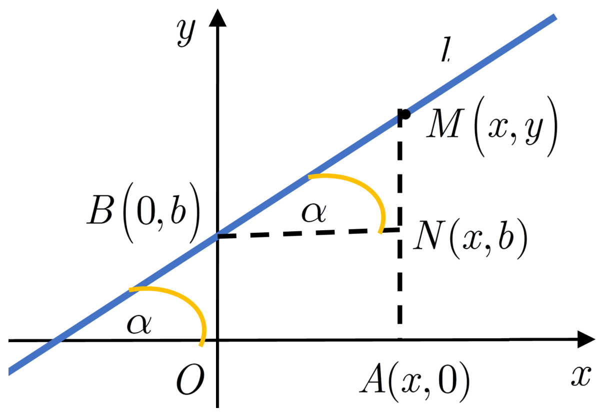
где t – параметр. Тогда **параметрические уравнения прямой** имеют вид:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = pt + y_0. \end{cases} \tag{6}$$

2.7 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy задана прямая l, не параллельная оси Oy. Её положение вполне определяется ординатой в точке пересечения прямой l с осью Oy и углом α между положительным направлением оси Ox и прямой l.

Пусть прямая пересекает ось Oy в точке $B(0, b)$ и образует с осью Ox угол α. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$.



Тогда из прямоугольного треугольника MNB найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x}.$$

Выражая из этого равенства y, получим **уравнение прямой с угловым коэффициентом**

$$y = kx + b, \tag{7}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ - **угловой коэффициент прямой**.

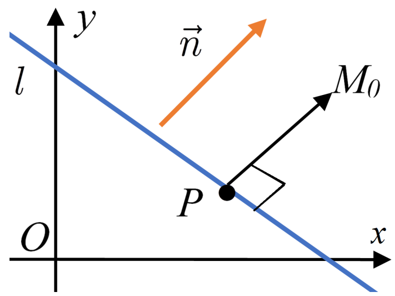
3 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана своим общим уравнением $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0, y_0) \notin l$. Найдем расстояние d от точки M_0 до прямой l.

Определение

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.

Пусть $P(x_1, y_1)$ - проекция точки M_0 на прямую l, тогда вектор $\overrightarrow{PM_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ будет коллинеарен вектору нормали $\vec{n} = (A, B)$, т.е. $\widehat{\vec{n}\ \overrightarrow{PM_0}} = 0^\circ$ или $\widehat{\vec{n}\ \overrightarrow{PM_0}} = 180^\circ$, и $|\overrightarrow{PM_0}| = d$.



Рассмотрим модуль скалярного произведения

$$|(\vec{n}, \overrightarrow{PM_0})| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PM_0}| \cdot |\cos(\widehat{\vec{n}\ \overrightarrow{PM_0}})| = |\vec{n}| \cdot d.$$

Отсюда

$$d = \frac{|(\vec{n}, \overrightarrow{PM_0})|}{|\vec{n}|}.$$

Так как $P(x_1, y_1) \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Поэтому

$$(\vec{n}, \overrightarrow{PM_0}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) =$$
$$= Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Отсюда

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8}$$

4 Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда

а) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются в точке, координаты которой находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Определение

Углом между прямыми l_1 и l_2 будем называть угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ и

$$\cos(\widehat{l_1\ l_2}) = \cos(\widehat{\vec{n}_1\ \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Условие параллельности прямых:

$$l_1 || l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1 : y = k_1x + b_1 \text{ и } l_2 : y = k_2x + b_2.$$

Тогда тангенс угла φ между прямыми l_1 и l_2 можно вычислить по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Условие параллельности прямых:

$$l_1 || l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

