Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Текст 1.3

Аннотация

Однородные системы линейных уравнений: критерий существования ненулевого решения, фундаментальная система решений, структура общего решения. Неоднородные системы линейных уравнений: структура общего решения.

1 Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальный набор решений

Пусть дана система линейных однородных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $r(A) = r(\widetilde{A})$, и всегда имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Теорема (критерий существования ненулевого решения однородной системы)

Для того чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных.

Из теоремы следует, что в случае квадратной матрицы A будем иметь:

1) если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение;

2) если $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Пример. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$$
Решение.

Поскольку $\det A = 0$, система имеет бесконечно много решений. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
и положим переменные x_1, x_2 базисными, x_3 свободной. Запишем соответствующую преобразованной матрице систему, в которой свободные переменные перенесем в правую часть:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -4x_3, \\ -5x_2 = -3x_3. \end{cases}$$
Отсюда, полагая свободную переменную $x_3 = c$, найдем общее решение системы:
$$\begin{cases} x_1 = -5,8c, \\ x_2 = 0,6c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Теорема (свойство решений однородной системы)

Если вектор-столбцы $X_1, X_2, ..., X_s$ - решения однородной системы, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.

Определение

Фундаментальной системой решений однородной системы называется любой набор $k = n - r$ линейно независимых решений этой системы, где n - количество неизвестных в системе, а r - ранг ее матрицы A

Теорема (о структуре общего решения однородной системы)

Если $F_1, F_2, ..., F_k$ - произвольная фундаментальная система решений однородной системы, то любое ее решение X можно представить в виде

$$X = c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_kF_k,$$

где c_1, c_2, ..., c_k - некоторые постоянные.

Пример. Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Приводим матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$. Пусть x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные. Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases} 4x_4 - x_5 = -2x_1 + x_2 - 3x_3, \\ 5x_4 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Пусть $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = c_3, \\ x_4 = \dfrac{-c_1 + 6c_2 - 4c_3}{5}, \\ x_5 = \dfrac{6c_1 + 19c_2 - c_3}{5}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из трех векторов (по количеству свободных переменных). Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$.

Тогда $x_4 = -0,2$, $x_5 = 1,2$, и решение можно записать в виде столбца

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

2) $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$.

При этом $x_4 = 1,2$, $x_5 = 3,8$, и следующее решение системы имеет вид

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}.$$

3) $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

Отсюда $x_4 = -0,8$, $x_5 = -0,2$, и последний столбец -

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

Построена фундаментальная система решений F_1, F_2, F_3. Поскольку столбцы свободных неизвестных $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений F_1, F_2, F_3.

Любое решение данной системы имеет вид:

$$X = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Эта формула задает общее решение системы.

2 Неоднородные системы линейных уравнений

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы)

Пусть вектор-столбец X^*- частное решение неоднородной системы $AX = B$ и известна фундаментальная система решений F_1, F_2, ..., F_k соответствующей однородной системы $AX = O$. Тогда общее решение неоднородной системы можно представить в виде $X = X^* + c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_kF_k$, где c_i $(i = 1, 2, ..., n)$ - произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение.

Убедимся в том, что система совместна:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Итак, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2 < 5$ (число неизвестных n равно 5), следовательно, система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

Составим по преобразованной матрице соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5, \\ 3x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 6x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4x_3 + 3x_4 - 6x_5}{3}, \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 6x_4 + 3x_5}{3}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений может быть такой:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5. \end{cases}$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = 5/3$, $x_2 = 1/3$. Следовательно,

$$X_{\text{част.}} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и общее решение системы имеет вид:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.