

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия
на плоскости и в пространстве
Лекция 2.3

к.ф.-м.н. Меншова И.В.



Комплексные числа



Комплексные числа

В современной математике, помимо действительных чисел, используют комплексные числа, потребность в которых возникла в XVI веке в связи с необходимостью определить корень из отрицательного числа,



Комплексные числа

В современной математике, помимо действительных чисел, используют комплексные числа, потребность в которых возникла в XVI веке в связи с необходимостью определить корень из отрицательного числа, а именно $\sqrt{-1}$ при решении квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.



Комплексные числа

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C .



Комплексные числа

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой \mathbb{C} .

Число $\sqrt{-1}$ обозначили буквой i и стали называть **мнимой единицей**:



Комплексные числа

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой \mathbb{C} .

Число $\sqrt{-1}$ обозначили буквой i и стали называть **мнимой единицей**: $i = \sqrt{-1}$,



Комплексные числа

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C .

Число $\sqrt{-1}$ обозначили буквой i и стали называть **мнимой единицей**: $i = \sqrt{-1}$,
 $i^2 = -1$,



Комплексные числа

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C .

Число $\sqrt{-1}$ обозначили буквой i и стали называть **мнимой единицей**: $i = \sqrt{-1}$,
 $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$,



Комплексные числа

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C .

Число $\sqrt{-1}$ обозначили буквой i и стали называть **мнимой единицей**: $i = \sqrt{-1}$,
 $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$, ...



Комплексные числа

Определение

Комплексным числом z называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица.



Комплексные числа

Определение

Комплексным числом z называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица. При этом число a называется **действительной частью** числа z и обозначается $Re z$, а число b – мнимой частью и обозначается $Im z$.



Комплексные числа

Определение

Комплексным числом z называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица. При этом число a называется **действительной частью** числа z и обозначается $Re z$, а число b – мнимой частью и обозначается $Im z$.

Если $a = 0$, то комплексное число $z = bi$ называют **ЧИСТО МНИМЫМ**.



Определение

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **комплексно сопряженными**.



Пример.



Пример. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$


Пример. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16,$



Пример. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$,

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16}$$



Комплексные числа

Пример. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$,

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$$



Пример. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$,

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i.$$



Комплексные числа

Пример. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$,

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i.$$

Корни – $x_{1,2} = 1 \pm 2i$ – комплексно сопряженные числа.



Определение

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется **алгебраической формой записи** комплексного числа.



Определение

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части:
 $a_1 = a_2, b_1 = b_2$.



Определение

Суммой двух комплексных чисел

$z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется
комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

а **разностью** - комплексное число

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$



Определение

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$


Данная формула получается путем обычного арифметического перемножения двух двучленов:



Комплексные числа

Данная формула получается путем обычного арифметического перемножения двух двучленов:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) =$$



Комплексные числа

Данная формула получается путем обычного арифметического перемножения двух двучленов:

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = \\ &= a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = \end{aligned}$$



Комплексные числа

Данная формула получается путем обычного арифметического перемножения двух двучленов:

$$\begin{aligned}z &= z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = \\&= a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = \\&= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.\end{aligned}$$



Определение

Частным от деления двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$



Определение

Частным от деления двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Данная формула получается путем умножения числителя и знаменателя дроби z_1/z_2 на число, сопряженное знаменателю, \bar{z}_2 .



Пример.



Комплексные числа

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:



Комплексные числа

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

а) $z_1 + z_2 = (1 - i) + (3 + 2i) =$



Комплексные числа

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (1 - i) + (3 + 2i) = \\ &= (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i; \end{aligned}$$



Комплексные числа

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (1 - i) + (3 + 2i) = \\ &= (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i; \end{aligned}$$

$$\text{б) } z_1 - z_2 = (1 - i) - (3 + 2i) =$$



Комплексные числа

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (1 - i) + (3 + 2i) = \\ &= (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_1 - z_2 &= (1 - i) - (3 + 2i) = \\ &= (1 - 3) + i(-1 - 2) = -2 - 3i; \end{aligned}$$



Комплексные числа

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (1 - i) + (3 + 2i) = \\ &= (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_1 - z_2 &= (1 - i) - (3 + 2i) = \\ &= (1 - 3) + i(-1 - 2) = -2 - 3i; \end{aligned}$$

$$\text{в) } z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (3 + 2i) =$$



Комплексные числа

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (1 - i) + (3 + 2i) = \\ &= (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_1 - z_2 &= (1 - i) - (3 + 2i) = \\ &= (1 - 3) + i(-1 - 2) = -2 - 3i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } z_1 \cdot z_2 &= (1 - i) \cdot (3 + 2i) = \\ &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2i - 3i - i \cdot 2i = 5 - i; \end{aligned}$$



$$\Gamma) \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{3 + 2i} =$$



$$\Gamma) \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{3 + 2i} = \frac{(1 - i) \cdot (3 - 2i)}{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)} =$$



$$\begin{aligned} \Gamma) \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 - i}{3 + 2i} = \frac{(1 - i) \cdot (3 - 2i)}{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)} = \\ &= \frac{3 - 2i - 3i - 2}{9 - 6i + 6i + 4} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i. \end{aligned}$$



Геометрическое изображение комплексных чисел

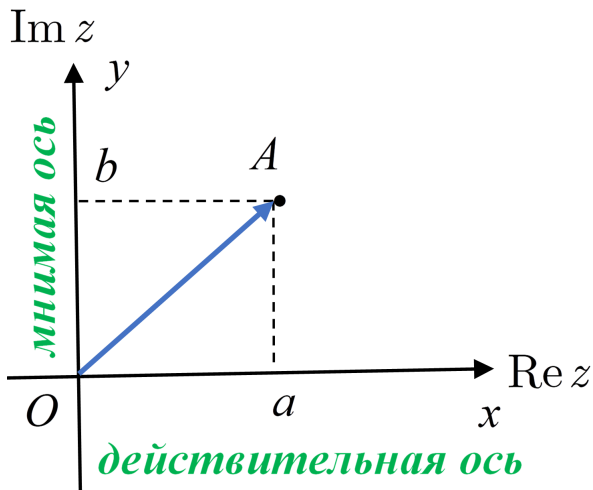


Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $A(a, b)$ или ее радиус-вектора \vec{OA} .



Геометрическое изображение комплексных чисел



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Точкам, лежащим на оси Ox , соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось Ox называют **действительной осью**.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Точкам, лежащим на оси Oy , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось Oy называют **мнимой осью**.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют **ПЛОСКОСТЬЮ комплексной переменной** или **комплексной плоскостью**.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют **ПЛОСКОСТЬЮ комплексной переменной** или **комплексной плоскостью**.

На оси x располагаются действительные числа, а на оси y – чисто мнимые.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется модуль вектора, соответствующего этому числу.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется модуль вектора, соответствующего этому числу.

Обозначение: $r, |z|$.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется модуль вектора, соответствующего этому числу.

Обозначение: $r, |z|$.

Вычисление: $r = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором, изображающим это число.



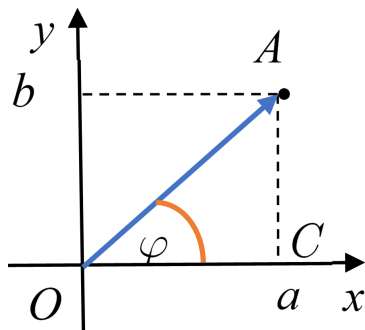
Геометрическое изображение комплексных чисел

Определение

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором, изображающим это число.
Обозначение: φ , $\text{Arg}z$.



Геометрическое изображение комплексных чисел



Геометрическое изображение комплексных чисел

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ является многозначной величиной:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$



Геометрическое изображение комплексных чисел

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ является многозначной величиной:

$$\text{Arg}z = \arg z + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента,
 $-\pi < \arg z \leq \pi$.



Геометрическое изображение комплексных чисел

Для практических расчетов из множества значений аргумента $\text{Arg}z$ в основном выбирают его главное значение $\text{arg} z$,



Геометрическое изображение комплексных чисел

Для практических расчетов из множества значений аргумента $\text{Arg}z$ в основном выбирают его главное значение $\arg z$, которое определяется по формуле:

$$\arg z = \arctg(b/a) + \pi k,$$



Геометрическое изображение комплексных чисел

где k выбирается по правилу:



Геометрическое изображение комплексных чисел

где k выбирается по правилу:
если z находится в 1-ой или 4-ой четвертях
комплексной плоскости, то $k = 0$;



Геометрическое изображение комплексных чисел

где k выбирается по правилу:

если z находится в 1-ой или 4-ой четвертях
комплексной плоскости, то $k = 0$;

если z находится во 2-ой четверти
комплексной плоскости, то $k = 1$;



Геометрическое изображение комплексных чисел

где k выбирается по правилу:
если z находится в 1-ой или 4-ой четвертях
комплексной плоскости, то $k = 0$;
если z находится во 2-ой четверти
комплексной плоскости, то $k = 1$;
если z находится в 3-ей четверти комплексной
плоскости, то $k = -1$.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Таким образом, комплексное число z можно записать в виде:



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Таким образом, комплексное число z можно записать в виде:

$$z = a + bi$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Таким образом, комплексное число z можно записать в виде:

$$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Таким образом, комплексное число z можно записать в виде:

$$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Таким образом, комплексное число z можно записать в виде:

$$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где r - модуль комплексного числа z ,



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Таким образом, комплексное число z можно записать в виде:

$$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где r - модуль комплексного числа z , φ - один из его аргументов.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Определение

Запись в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
называется **тригонометрической
формой** записи комплексного числа.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число
 $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Для числа z имеем $a = 1$, $b = -1$.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Для числа z имеем $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Для числа z имеем $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Для числа z имеем $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(b/a) + \pi k$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Для числа z имеем $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg z = \operatorname{arctg}(b/a) + \pi k = \\ &= \operatorname{arctg}((-1)/1) + \pi \cdot 0 = -\pi/4.\end{aligned}$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Для числа z имеем $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(b/a) + \pi k =$$

$$= \operatorname{arctg}((-1)/1) + \pi \cdot 0 = -\pi/4.$$

$$\text{Отсюда } z = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)).$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

*Арифметические действия над комплексными
числами в тригонометрической форме:*



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$,
 $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$,

$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$1) z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$,

$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$1) z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из операции умножения комплексных чисел
следует, что

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где n - целое положительное число.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где n - целое положительное число. Это выражение называется **формулой Муавра**.



Показательная форма записи комплексного числа



Показательная форма записи комплексного числа

Используя **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

каждое комплексное число можно записать в
форме

$$z = re^{i\varphi},$$



Показательная форма записи комплексного числа

Используя **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

каждое комплексное число можно записать в
форме

$$z = re^{i\varphi},$$

которая называется **показательной
формой записи** комплексного числа.



Показательная форма записи комплексного числа

Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме:



Показательная форма записи комплексного числа

Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме:

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда



Показательная форма записи комплексного числа

Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме:

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$1) z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$



Показательная форма записи комплексного числа

Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме:

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$1) z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$



Корень n -ой степени



Корень n -ой степени

Определение

Корнем n -ой степени из комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

называется комплексное число, определяемое равенством

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$
$$k = 0, 1, \dots, n - 1.$$



Корень n -ой степени

Таким образом, корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений для $k = 0, 1, \dots, n - 1$.



Корень n -ой степени

Пример.



Корень n-ой степени

Пример. Найти все корни уравнения
 $x^3 + 1 = 0$.



Корень n-ой степени

Пример. Найти все корни уравнения

$$x^3 + 1 = 0.$$

Решение.



Корень n-ой степени

Пример. Найти все корни уравнения
 $x^3 + 1 = 0$.

Решение.

Необходимо найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.



Корень n-ой степени

Пример. Найти все корни уравнения $x^3 + 1 = 0$.

Решение.

Необходимо найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Запишем число $z = -1$ в тригонометрической форме:



Корень n-ой степени

Пример. Найти все корни уравнения $x^3 + 1 = 0$.

Решение.

Необходимо найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Запишем число $z = -1$ в тригонометрической форме:

$$a = -1, b = 0, r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \varphi = \pi.$$



Корень n-ой степени

Пример. Найти все корни уравнения $x^3 + 1 = 0$.

Решение.

Необходимо найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Запишем число $z = -1$ в тригонометрической форме:

$$a = -1, b = 0, r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \varphi = \pi.$$

Отсюда $z = \cos \pi + i \sin \pi$.



Корень n-ой степени

Тогда

$$\sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$



Корень n-ой степени

Тогда

$$\sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0: (\sqrt[3]{-1})_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$



Корень n-ой степени

Тогда

$$\sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0: (\sqrt[3]{-1})_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$k = 1: (\sqrt[3]{-1})_2 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} = \\ = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$



Корень n-ой степени

$$\begin{aligned}k = 2: (\sqrt[3]{-1})_3 &= \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} = \\ &= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$



Корень n-ой степени

$$\begin{aligned}k = 2: (\sqrt[3]{-1})_3 &= \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} = \\ &= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sqrt[3]{-1} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$



Корень n -ой степени

Найденные корни на плоскости:

