Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.5

Аннотация

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и практические приложения.

1 Скалярное произведение векторов

Определение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$.

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$.
5. $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Теорема (скалярное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ .$$

2 Приложения скалярного произведения

1. Угол между векторами.

Угол φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

2. Проекция вектора на заданное направление.

Учитывая определение проекции вектора на ось, формулу скалярного произведения векторов можно записать иначе:

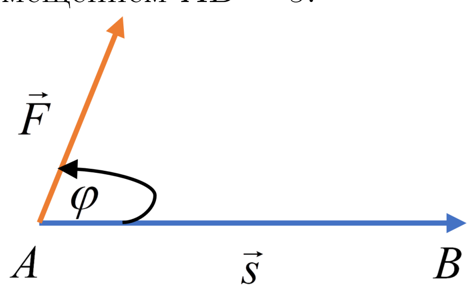
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Следовательно, например, проекция вектора $\vec{a}$ на направление, задаваемое вектором $\vec{b}$, может быть вычислена по формуле:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3. Работа постоянной силы.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\vec{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$.

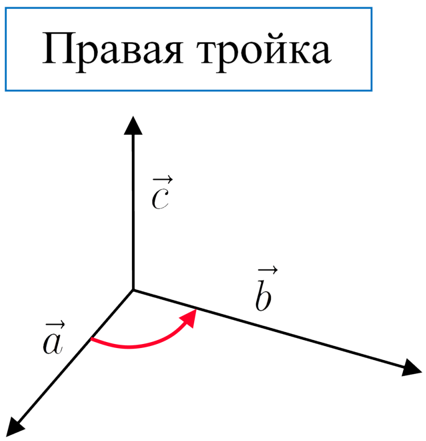


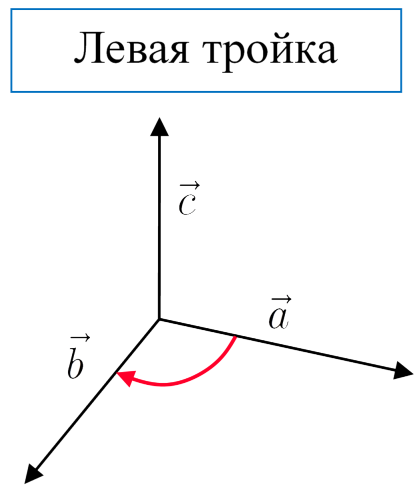
Из физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна $A = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\varphi$, т.е. $A = \vec{F}\cdot\vec{s}$.

3 Векторное произведение векторов

Определение

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.





Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$, $\lambda \in R$.

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
4. $\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$.

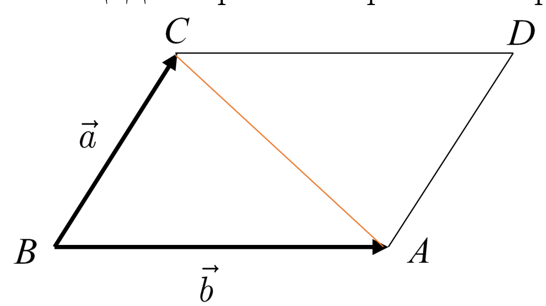
Теорема (векторное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

4 Приложения векторного произведения

1. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.



По определению векторного произведения $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$. Эту формулу можно использовать для нахождения площади параллелограмма и треугольника, построенных на этих векторах: $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$ и $S_\Delta = \dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

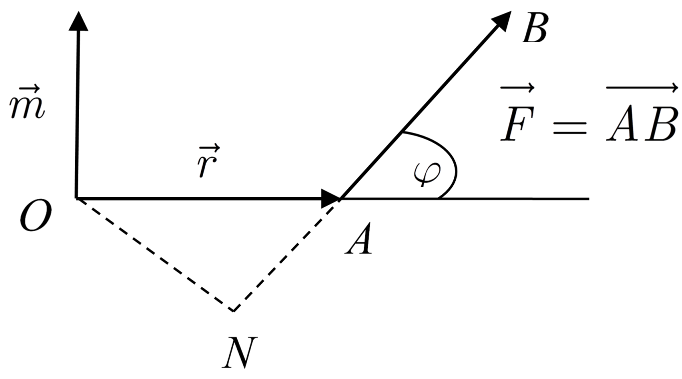
2. Определение момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства. Из физики известно, что **моментом силы** $\overrightarrow{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{m}$, который проходит через точку O и

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}| \cdot ON = |\overrightarrow{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{OA}})$;
в) образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.



Следовательно, $\vec{m} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$.

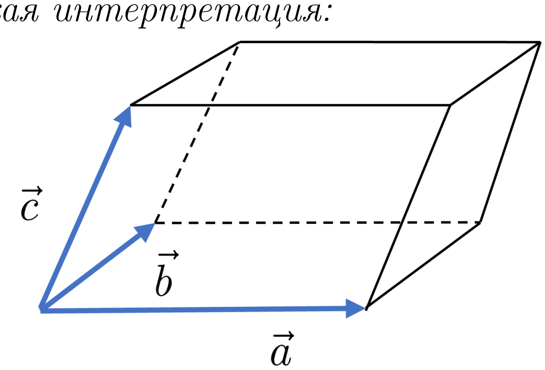
5 Смешанное произведение векторов

Определение

Если вектор $\vec{a}$ векторно умножить на вектор $\vec{b}$, а полученный вектор скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометрическая интерпретация:



На трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ построим параллелепипед как на ребрах, выходящих из одной вершины. Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая, и со знаком «минус», если тройка – левая.

Свойства смешанного произведения:
1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Теорема (смешанное произведение в координатной форме)

Пусть заданы три вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

6 Приложения смешанного произведения

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая.

2. Установление компланарности векторов.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. А объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах $V_1 = \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.