Раздел 2. Дифференциальные уравнения

Модуль 4. Линейные дифференциальные уравнения и системы.

Лекция 4.1

Аннотация

Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) *n*-го порядка, однородные и неоднородные. Теорема о существовании и единственности решения. Дифференциальный оператор $L[y]$, его свойства. Структура общего решения неоднородного линейного ДУ (НЛДУ). Теорема о наложении частных решений. Теорема о наложении частных решений. Линейное пространство решений однородного ЛДУ (ОЛДУ). Линейно зависимые и независимые системы функций на отрезке. Определитель Вронского (вронскиан). Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций. Теорема о вронскиане системы линейно зависимых решений ОЛДУ. Теорема о структуре общего решения ОЛДУ. Размерность пространства решений ОЛДУ. Фундаментальная система решений ОЛДУ. Формула Остроградского-Лиувилля и ее следствия.

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

1.1. Основные понятия. Дифференциальный оператор, его свойства. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, его свойство

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям (ЛДУ).

Задача. Определить закон движения материальной точки массой m, на которую действует сила, направленная к началу координат и пропорциональная расстоянию точки от начала координат. Сопротивлением среды пренебречь.

Решение. Пусть $x(t)$ - положение точки в момент времени t на оси Ox, тогда $\frac{dx}{dt}$ – скорость точки в момент времени t; $\frac{d^2x}{dt^2}$ – ее ускорение.

Согласно второму закону Ньютона, имеем ДУ движения $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -a \cdot x$ или $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m} \cdot x = 0$ – ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его решение $x(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{a}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{a}{m}}t = A\sin\left(\sqrt{\frac{a}{m}}t + \varphi\right)$ - гармонические колебания с амплитудой A, начальной фазой φ и периодом $\sqrt{\frac{a}{m}}\left(t+T\right) + \varphi = \sqrt{\frac{a}{m}}t + \varphi + 2\pi$ или $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a}}$. Здесь $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\sin\varphi = \frac{C_1}{A}$, $\cos\varphi = \frac{C_2}{A}$, C_1 и C_2 - константы.

<u>*Определение 1.1.*</u> Уравнение вида

$$b_0(x)\cdot y^{(n)} + b_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + b_n(x)\cdot y = g(x), \qquad (2.1)$$

где $b_0(x) \neq 0$, $b_1(x)$, …, $b_n(x)$, $g(x)$ – заданные непрерывные (на некотором множестве X (отрезок, интервал, полупрямая или вся числовая прямая) функции, называется ***ЛДУ n-го порядка.***

Уравнение (2.1) содержит искомую функцию y и все ее производные лишь в первой степени (отсюда и название уравнения – *линейное*).

Функции $b_0(x)$, $b_1(x)$, …, $b_n(x)$ называются ***коэффициентами*** уравнения (2.1), а функция $g(x)$ – его ***свободным членом***.

<u>*Определение 1.2.*</u> Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (2.1) называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка.*** Если $g(x) \neq 0$, то ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n-го порядка*** (или линейным уравнением с правой частью)**.**

<u>*Пример.*</u> $x^2y'' + xy' - y = 0$ – ЛОДУ второго порядка,

$x^2y'' + xy' - y = e^{-x}\ln x$ – ЛНДУ второго порядка.

Разделим обе части уравнения (2.1) на $b_0(x) \neq 0$ и запишем уравнение (2.1) в виде

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot y = f(x) \qquad (2.2)$$

– ***приведенное ЛДУ n-го порядка.***

К уравнению (2.2) могут быть добавлены начальные условия

$$y(x_0) = y_1^0,\ y'(x_0) = y_2^0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^0,\ x_0 \in X. \qquad (2.3)$$

Полученная задача (2.2)-(2.3) называется ***задачей Коши***.

<u>Теорема 1</u> *(о существовании и единственности решения задачи Коши).* Решение задачи Коши (2.2)-(2.3) существует и единственно на любом отрезке $[a,b] \in X$.

Введем следующие о**бозначения**:

$L[y(x)] \equiv y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y$ - ***линейный дифференциальный оператор n-го порядка.*** Тогда $L[y] = 0$ – ЛОДУ *n*-го порядка, $L[y] = f(x)$ – ЛНДУ *n*-го порядка.

<u>Лемма 1</u> *(свойство линейного оператора).* Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$- произвольные функции, имеющие производные до *n*-го порядка включительно, C_1 и C_2 – произвольные постоянные, тогда выполняется равенство

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 \cdot L[y_1] + C_2 \cdot L[y_2]. \qquad (2.4)$$

Докажем две основные теоремы ЛДУ.

<u>Теорема 2</u> *(о структуре общего решения ЛНДУ).* Общее решение $y_{он} = y(x)$ неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ есть сумма какого-либо частного решения $y_{чн}(x)$ этого уравнения и общего решения $y_{оо}(x)$ соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$, т.е. $\boxed{y = y_{оо} + y_{чн}}$.

Доказательство:

1. Покажем сначала, что $y(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$ является решением ДУ $L[y] = f(x)$.

   Из леммы 1 следует, что

   $$L[y_{чн}(x) + y_{оо}(x)] = L[y_{чн}(x)] + L[y_{оо}(x)] = f(x) + 0 = f(x).$$

2. Теперь покажем, что любое решение $y(x)$ неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ есть $y(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$.

   Имеем

$$L[y(x)-y_{чн}(x)]=L[y(x)]-L[y_{чн}(x)]=f(x)-f(x)=0=L[y_{oo}(x)].$$

Теорема доказана.

Теорема 3 (о наложении решений) (свойство ЛДУ). Пусть $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ – соответствующие решения уравнений $L[y]=f_1(x)$ и $L[y]=f_2(x)$, тогда $y_1(x)+y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$.

Доказательство: Из леммы 1 следует, что

$$L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]=f_1(x)+f_2(x).$$

Теорема доказана.

1.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения

1.2.1. Линейно зависимые и независимые системы функций на отрезке. Определитель Вронского

Рассмотрим ЛОДУ $L[y]=0$. Из Леммы 1 следует Лемма 2.

Лемма 2. Пусть $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ – какие-либо частные решения ЛОДУ $L[y]=0$ и $C_1,\ C_2,\ldots,\ C_n$ – произвольные постоянные. Тогда линейная комбинация $C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x)$ также является решением этого уравнения.

Из Леммы 2 следует, что множество решений ЛОДУ образует линейное пространство. Какова размерность этого пространства, и как устроен базис? То есть может ли функция $y(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x)$ являться общим решением уравнения $L[y]=0$?

Определение 1.3. Функции $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ называются ***линейно независимыми*** на некотором отрезке $[a,b]$, если в каждой точке этого отрезка равенство

$$\alpha_1\cdot y_1(x)+\alpha_2\cdot y_2(x)+\ldots+\alpha_n\cdot y_n(x)=0 \tag{2.5}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ для всех чисел $\alpha_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\ldots,n$.

Определение 1.4. Если хотя бы одно из чисел $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\ldots,n$, отлично от нуля и выполняется равенство (2.5), то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на $[a,b]$.

Замечание. Из определений 1.3 и 1.4 следует, что два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми (зависимыми) на отрезке $[a,b]$, если их отношение не является (является) постоянным на этом отрезке, т.е. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const\right)$, $x \in [a,b]$.

Например, 1) функции $y_1(x) = 3e^x$ и $y_2(x) = e^x$ – линейно зависимы, т.к. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const \neq 0$;

2) функции $y_1(x) = 3e^x$ и $y_3(x) = e^{2x}$ – линейно независимы, т.к. $\frac{y_1(x)}{y_3(x)} = 3e^{-x} \neq const$;

3) функции $y_4(x) = \sin x$ и $y_5(x) = \cos x$ – линейно независимы, т.к. $\frac{y_4(x)}{y_5(x)} = \operatorname{tg} x \neq const$ и $\alpha_1 \cdot \sin x + \alpha_2 \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Средством изучения линейной зависимости системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ является так называемый определитель Вронского (или просто *вронскиан*) (Юзеф Мария Вронский – польский математик (1776-1853)).

Определитель Вронского имеет вид:

$$\boxed{W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}.$$

В частности, $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2$.

Теорема 4. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю, т.е. $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$, $x \in [a,b]$.

Замечание. Теорема 4 дает *необходимое условие линейной зависимости*. Обратное утверждение неверно, т.е. определитель Вронского может тождественно обращаться в нуль и в том случае, когда данные функции образуют линейную независимую систему на некотором отрезке.

Теорема 5. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ – линейно независимые решения ЛОДУ $L[y] = 0$ на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского ни при одном значении $x \in [a,b]$ не обращается в нуль.

Замечание. Теорема 5 дает *достаточное условие линейной независимости*, то есть если $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$ для всех значений переменной из отрезка $[a,b]$, то про линейную зависимость функций $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ в общем случае ничего определенного сказать нельзя.

Из теорем 4 и 5 вытекают *следствия*:

1. Если определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ на отрезке $[a,b]$ не равен нулю хотя бы в одной точке этого отрезка, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ являются линейно независимыми, но для случая, когда функции являются решениями ДУ будет верно более сильное следствие 2.
2. Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ являются решениями ЛОДУ $L[y] = 0$, то $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ либо тождественно равен нулю на отрезке $[a,b]$, и это означает, что $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, либо не обращается в нуль ни в одной точке этого отрезка, что означает линейную независимость функций $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$.
3. *(Признак линейной независимости n частных решений ЛОДУ).* Для того чтобы *n* решений ЛОДУ *n*-го порядка с непрерывными коэффициентами были линейно независимы на интервале непрерывности коэффициентов (на отрезке $[a,b]$), необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля во всех точках отрезка $[a,b]$.

Примеры.

1. Функции x, $\sin x$, $\cos x$ являются линейно независимыми, т.к.

$$W[x, \sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -x \neq 0.$$

2. Рассмотрим две функции

$$f(x) = (x-2)^2,\ g(x) = \begin{cases} -(x-2)^2, & x < 2; \\ (x-2)^2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Обе функции всюду дифференцируемы (в том числе в точке $x = 2$, где производные обеих функций обращаются в нуль. Очевидно, что эти функции являются линейно независимыми. Рассмотрим их вронскиан:

$$W[f, g](x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} (x-2)^2 & -(x-2)^2 \\ 2(x-2) & -2(x-2) \end{vmatrix} = 0,\ x < 2; \\ \begin{vmatrix} (x-2)^2 & (x-2)^2 \\ 2(x-2) & 2(x-2) \end{vmatrix} = 0,\ x \geq 2. \end{cases}$$

Видно, что равенство определителя Вронского нулю не влечет за собой линейной зависимости в случае произвольного выбора функций.

1.2.2. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля

Определение 1.5. Совокупность любых *n* линейно независимых на отрезке $[a, b]$ частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ ЛОДУ $L[y] = 0$ будем называть ***фундаментальной системой (набором) решений (ФСР)***.

Определитель Вронского, составленный из ФСР отличен от нуля.

Теорема 6 (о существовании ФСР). Всякое ЛОДУ с непрерывными коэффициентами имеет ФСР.

Замечание. ФСР ЛОДУ определена неединственным образом.

Теорема 7 (о структуре общего решения ЛОДУ). Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ - фундаментальный набор решений ЛОДУ $L[y] = 0$. Тогда *общее решение ЛОДУ* задается формулой: $\boxed{y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n}$.

<u>Пример.</u> $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = e^{-2x}$ - частные решения ЛОДУ второго порядка $y'' - 4y' = 0$. Эти решения линейно независимы, т.к. их определитель Вронского

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{2x}e^{-2x} - 2e^{2x}e^{-2x} = -4 \neq 0.$$

$y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = e^{-2x}$ образуют ФСР, следовательно $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ - общее решение уравнения $y'' - 4y' = 0$.

Замечание. Множество решений ЛОДУ образует *n*-мерное линейное пространство, а ФСР является его базисом.

Для определителя Вронского можно доказать формулу

$$\boxed{W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = W_0 \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}},$$

где W_0 - значение вронскиана при $x = x_0$ $(W_0 = W(x_0)), y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n$ образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ $L[y] = 0$, $a_1(x)$ - коэффициент перед производной $y^{(n-1)}$. Эта формула называется ***формулой Остроградского-Лиувилля***. Из этой формулы следуют две теоремы 7 и 8 (следствия формулы Остроградского-Лиувилля).

<u>Теорема 8</u> (о свойстве определителя Вронского для системы решений ЛОДУ). Если определитель Вронского для системы решений ЛОДУ равен нулю в какой-либо точке $x_0 \in [a,b]$, то он тождественно равен нулю на всем отрезке $[a,b]$. Если определитель Вронского не равен нулю в какой-либо точке $x_0 \in [a,b]$, то он не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$

<u>Теорема 9</u>. Если известно одно частное решение $y_1(x)$ ЛОДУ второго порядка $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, то второе его частное решение $y_2(x)$, линейно независимое с первым, можно найти по формуле

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx}.$$

Примеры.

1. Функция $y_1(x) = e^x$ является частным решением ЛОДУ второго порядка $y'' - 2y' + y = 0$, тогда второе решение $y_2(x) = e^x \cdot \int \frac{e^{\int 2dx}}{e^{2x}} dx = e^x \cdot \int dx = xe^x$.

   Общее решение – $y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)$.

2. Пусть известно, что частное решение ЛОДУ второго порядка $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ есть $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$. Тогда

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{-2\ln|x|}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{x} \cdot (-\operatorname{ctg} x) = -\frac{\cos x}{x}.$$

   Общее решение – $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \left(-\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{1}{x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$.

3. Составим дифференциальное уравнение, фундаментальный набор решений которого образован функциями $1, x^2, e^x$. Для этого запишем искомое уравнение через определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & e^x & y \\ 0 & 2x & e^x & y' \\ 0 & x & e^x & y'' \\ 0 & 1 & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

   Раскрывая этот определитель, получим $(x-1)y''' - xy'' + y' = 0$.