Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Интегралы и дифференциальные уравнения

Раздел "Дифференциальные уравнения".

Модуль 2. Линейные дифференциальные уравнения и системы

Лекция 2.2

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.
к.ф.-м.н. Чирков Д.М.

§1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

1.1. Основные понятия. Дифференциальный оператор, его свойства. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, его свойство

1.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения

1.2.1. Линейно зависимые и независимые системы функций на отрезке. Определитель Вронского

1.2.2. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля

1.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов

1.5. Метод Лагранжа вариации постоянных

Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ — известные вещественные числа.

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ — известные вещественные числа.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (см. лекцию 2.1) его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \,,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (1).

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ — известные вещественные числа.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (см. лекцию 2.1) его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \,,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) методом Эйлера. Для этого мы представим решение в виде $y = \mathrm{e}^{kx},\ k = \mathrm{const}$.

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ – известные вещественные числа.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (см. лекцию 2.1) его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \,,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) методом Эйлера. Для этого мы представим решение в виде $y = \mathrm{e}^{kx},\ k = \mathrm{const}$.

Вычислим производные функции y:

$$y' = k \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y'' = k^2 \cdot \mathrm{e}^{kx}, \ldots, y^{(n-1)} = k^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y^{(n)} = k^n \cdot \mathrm{e}^{kx}$$

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ – известные вещественные числа.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (см. лекцию 2.1) его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \,,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) методом Эйлера. Для этого мы представим решение в виде $y = \mathrm{e}^{kx},\ k = \mathrm{const}$.

Вычислим производные функции y:

$$y' = k \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y'' = k^2 \cdot \mathrm{e}^{kx}, \ldots, y^{(n-1)} = k^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y^{(n)} = k^n \cdot \mathrm{e}^{kx}$$

Подставим функции $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ в уравнение (1):

$$k^n \cdot \mathrm{e}^{kx} + a_1 \cdot k^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{kx} + \ldots + a_n \cdot \mathrm{e}^{kx} = 0$$

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ – известные вещественные числа.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (см. лекцию 2.1) его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \,,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) методом Эйлера. Для этого мы представим решение в виде $y = \mathrm{e}^{kx},\ k = \mathrm{const}$.

Вычислим производные функции y:

$$y' = k \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y'' = k^2 \cdot \mathrm{e}^{kx}, \ldots, y^{(n-1)} = k^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y^{(n)} = k^n \cdot \mathrm{e}^{kx}$$

Подставим функции $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ в уравнение (1):

$$k^n \cdot \mathrm{e}^{kx} + a_1 \cdot k^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{kx} + \ldots + a_n \cdot \mathrm{e}^{kx} = 0 \,\Big|\, : \mathrm{e}^{kx}$$

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ – известные вещественные числа.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (см. лекцию 2.1) его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \,,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) методом Эйлера. Для этого мы представим решение в виде $y = \mathrm{e}^{kx},\ k = \mathrm{const}$.

Вычислим производные функции y:

$$y' = k \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y'' = k^2 \cdot \mathrm{e}^{kx}, \ldots, y^{(n-1)} = k^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{kx},\ y^{(n)} = k^n \cdot \mathrm{e}^{kx}$$

Подставим функции $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ в уравнение (1):

$$k^n \cdot \mathrm{e}^{kx} + a_1 \cdot k^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{kx} + \ldots + a_n \cdot \mathrm{e}^{kx} = 0 \;\Big|\; : \mathrm{e}^{kx}$$

(2) $\boxed{k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_n = 0}$ – характеристическое уравнение

Решение ЛОДУ второго порядка

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0, \quad b, c \ - \text{известные числа} \tag{3}$$

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0, \quad b, c \ - \text{известные числа} \tag{3}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + bk + c = 0 \tag{4}$$

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0, \quad b, c \ - \text{известные числа} \tag{3}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + bk + c = 0 \tag{4}$$

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4 \cdot c$$

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0, \quad b, c \ - \text{известные числа} \tag{3}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + bk + c = 0 \tag{4}$$

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4 \cdot c$$

Решения уравнения (3) зависят от значения дискриминанта.

$$D > 0$$

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$.

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ \left(\mathrm{e}^{k_1 x}\right)' & \left(\mathrm{e}^{k_2 x}\right)' \end{vmatrix} =$$

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ \left(\mathrm{e}^{k_1 x}\right)' & \left(\mathrm{e}^{k_2 x}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ k_1\,\mathrm{e}^{k_1 x} & k_2\,\mathrm{e}^{k_2 x} \end{vmatrix} =$$

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ \left(\mathrm{e}^{k_1 x}\right)' & \left(\mathrm{e}^{k_2 x}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ k_1\,\mathrm{e}^{k_1 x} & k_2\,\mathrm{e}^{k_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{k_1 x}\, k_2\, \mathrm{e}^{k_2 x} - \mathrm{e}^{k_2 x}\, k_1\, \mathrm{e}^{k_1 x} =$$

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ \left(\mathrm{e}^{k_1 x}\right)' & \left(\mathrm{e}^{k_2 x}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ k_1\,\mathrm{e}^{k_1 x} & k_2\,\mathrm{e}^{k_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{k_1 x}\, k_2\, \mathrm{e}^{k_2 x} - \mathrm{e}^{k_2 x}\, k_1\, \mathrm{e}^{k_1 x} = \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}\, k_2 - \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}\, k_1 =$$

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ \left(\mathrm{e}^{k_1 x}\right)' & \left(\mathrm{e}^{k_2 x}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ k_1\,\mathrm{e}^{k_1 x} & k_2\,\mathrm{e}^{k_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{k_1 x}\, k_2\, \mathrm{e}^{k_2 x} - \mathrm{e}^{k_2 x}\, k_1\, \mathrm{e}^{k_1 x} = \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}\, k_2 - \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}\, k_1 =$$

$$= \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0$$

$D > 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **различных** действительных корня k_1, k_2.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$.

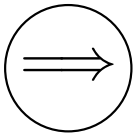
Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

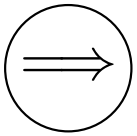
$$W[\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ \left(\mathrm{e}^{k_1 x}\right)' & \left(\mathrm{e}^{k_2 x}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} \\ k_1\,\mathrm{e}^{k_1 x} & k_2\,\mathrm{e}^{k_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{k_1 x}\, k_2\, \mathrm{e}^{k_2 x} - \mathrm{e}^{k_2 x}\, k_1\, \mathrm{e}^{k_1 x} = \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}\, k_2 - \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}\, k_1 =$$

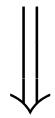
$$= \mathrm{e}^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0 \Longrightarrow$$



функции $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми



функции $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми



они образуют фундаментальную систему решений (ФСР)

$\Longrightarrow$ функции $\mathrm{e}^{k_1 x}$ и $\mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми

$\Downarrow$

они образуют фундаментальную систему решений (ФСР)

$\Downarrow$

общее решение уравнения (3) при $D > 0$ имеет вид:

$$y = C_1 \cdot \mathrm{e}^{k_1 x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{k_2 x} \tag{5}$$

$$D = 0$$

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$.

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = x\,\mathrm{e}^{kx}$.

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = x\,\mathrm{e}^{kx}$.

Для того, чтобы проверить, что решения e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{kx}, x\,\mathrm{e}^{kx}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ \left(\mathrm{e}^{kx}\right)' & \left(x\,\mathrm{e}^{kx}\right)' \end{vmatrix} =$$

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = x\,\mathrm{e}^{kx}$.

Для того, чтобы проверить, что решения e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{kx}, x\,\mathrm{e}^{kx}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ \left(\mathrm{e}^{kx}\right)' & \left(x\,\mathrm{e}^{kx}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ k\,\mathrm{e}^{kx} & \mathrm{e}^{kx}(1+kx) \end{vmatrix} =$$

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = x\,\mathrm{e}^{kx}$.

Для того, чтобы проверить, что решения e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{kx}, x\,\mathrm{e}^{kx}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ \left(\mathrm{e}^{kx}\right)' & \left(x\,\mathrm{e}^{kx}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ k\,\mathrm{e}^{kx} & \mathrm{e}^{kx}(1+kx) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{e}^{kx}(1+kx) - k\,\mathrm{e}^{kx}\,x\,\mathrm{e}^{kx} =$$

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = x\,\mathrm{e}^{kx}$.

Для того, чтобы проверить, что решения e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{kx}, x\,\mathrm{e}^{kx}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ \left(\mathrm{e}^{kx}\right)' & \left(x\,\mathrm{e}^{kx}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ k\,\mathrm{e}^{kx} & \mathrm{e}^{kx}(1+kx) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{e}^{kx}(1+kx) - k\,\mathrm{e}^{kx}\,x\,\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{2kx}(1+kx) - \mathrm{e}^{2kx}\,kx = \mathrm{e}^{2kx} \neq 0$$

$D = 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **одинаковых** действительных корня $k_1 = k_2 = k$.

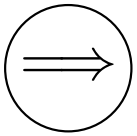
Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = x\,\mathrm{e}^{kx}$.

Для того, чтобы проверить, что решения e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{kx}, x\,\mathrm{e}^{kx}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ \left(\mathrm{e}^{kx}\right)' & \left(x\,\mathrm{e}^{kx}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx} \\ k\,\mathrm{e}^{kx} & \mathrm{e}^{kx}(1+kx) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{e}^{kx}(1+kx) - k\,\mathrm{e}^{kx}\,x\,\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{2kx}(1+kx) - \mathrm{e}^{2kx}\,kx = \mathrm{e}^{2kx} \neq 0 \ \Rightarrow$$



функции e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми

$\Longrightarrow$ функции e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми

$\Downarrow$

они образуют фундаментальную систему решений (ФСР)

$\Longrightarrow$ функции e^{kx} и $x\,\mathrm{e}^{kx}$ являются линейно независимыми

$\Downarrow$

они образуют фундаментальную систему решений (ФСР)

$\Downarrow$

общее решение уравнения (3) при $D = 0$ имеет вид:

$$y = C_1 \cdot \mathrm{e}^{kx} + C_2 \cdot x\,\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{kx}(C_1 + C_2 x) \tag{6}$$

$D < 0$

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$.

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$.

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x] =$$

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & \mathrm{e}^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & \mathrm{e}^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) - \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) =$$

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & \mathrm{e}^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) - \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) =$$

$$= \beta\,\mathrm{e}^{\alpha x} \neq 0$$

$D < 0$

Характеристическое уравнение имеет 2 **комплексно-сопряженных** корня $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Корню k_1 соответствует решение $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$.

Корню k_2 соответствует решение $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Для того, чтобы проверить, что решения $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми, вычислим определитель Вронского:

$$W[\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & \mathrm{e}^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) - \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) =$$

$$= \beta\,\mathrm{e}^{\alpha x} \neq 0 \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функции $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми

$\Rightarrow$ функции $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми

$$\Downarrow$$

они образуют фундаментальную систему решений (ФСР)

$\Rightarrow$ функции $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми

$$\Downarrow$$

они образуют фундаментальную систему решений (ФСР)

$$\Downarrow$$

общее решение уравнения (3) при $D<0$ имеет вид:

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \tag{7}$$

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка

1. Составляем характеристическое уравнение.

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка

1. Составляем характеристическое уравнение.
2. Находим корни характеристического уравнения.

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка

1. Составляем характеристическое уравнение.
2. Находим корни характеристического уравнения.
3. Строим ФСР:

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка

1. Составляем характеристическое уравнение.
2. Находим корни характеристического уравнения.
3. Строим ФСР:
   - каждому действительному корню k, который повторяется r раз, соответствуют r линейно независимых частных решений $y_1 = \mathrm{e}^{kx}, y_2 = x \cdot \mathrm{e}^{kx}, \ldots, y_r = x^{r-1} \cdot \mathrm{e}^{kx}$;

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка

1. Составляем характеристическое уравнение.
2. Находим корни характеристического уравнения.
3. Строим ФСР:
   - каждому действительному корню k, который повторяется r раз, соответствуют r линейно независимых частных решений $y_1 = \mathrm{e}^{kx}, y_2 = x \cdot \mathrm{e}^{kx}, \ldots, y_r = x^{r-1} \cdot \mathrm{e}^{kx}$;
   - каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$, которая повторяется q раз, соответствуют $2q$ линейно независимых частных решений $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2 = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots,$ $y_q = x^{q-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), y_{q+1} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x), y_{q+2} = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),$ $\ldots, y_{2q} = x^{q-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x).$

$$\boxed{r + 2q = n}$$

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка

1. Составляем характеристическое уравнение.
2. Находим корни характеристического уравнения.
3. Строим ФСР:
   - каждому действительному корню k, который повторяется r раз, соответствуют r линейно независимых частных решений $y_1 = \mathrm{e}^{kx}, y_2 = x \cdot \mathrm{e}^{kx}, \ldots, y_r = x^{r-1} \cdot \mathrm{e}^{kx}$;
   - каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$, которая повторяется q раз, соответствуют $2q$ линейно независимых частных решений $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2 = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots,$ $y_q = x^{q-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), y_{q+1} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x), y_{q+2} = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),$ $\ldots, y_{2q} = x^{q-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x).$

   $\boxed{r + 2q = n}$
4. Записываем общее решение: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Для записи общего решения ЛОДУ можно воспользоваться таблицей:

Корни	Некратные (не повторяются)	Кратные (повторяются r раз)
Вещественный (k)	$C\,\mathrm{e}^{kx}$	$\mathrm{e}^{kx}(C_1 + \ldots + C_r x^{r-1})$
Комплексно-сопряженные $(\alpha \pm i\beta)$	$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + {}$ $+ C_2 \sin \beta x)$	$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 + \ldots + C_r x^{r-1}) \cos \beta x +$ $+\,\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 + \ldots + C_r x^{r-1}) \sin \beta x$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами

ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f(x) \tag{8}$$

ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f(x) \tag{8}$$

Согласно теореме о структуре общего решения ЛНДУ (см. лекцию 2.1) решение уравнения (8) представляет собой сумму любого частного решения $y_{\text{чн}}$ этого уравнения и общего решения y_{oo} соответствующего ему однородного уравнения (1):

$$y = y_{\text{чн}} + y_{oo}$$

ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f(x) \tag{8}$$

Согласно теореме о структуре общего решения ЛНДУ (см. лекцию 2.1) решение уравнения (8) представляет собой сумму любого частного решения $y_{\text{чн}}$ этого уравнения и общего решения y_{oo} соответствующего ему однородного уравнения (1):

$$y = y_{\text{чн}} + y_{oo}$$

Частное решение $y_{\text{чн}}$ может быть найдено двумя способами:

ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f(x) \tag{8}$$

Согласно теореме о структуре общего решения ЛНДУ (см. лекцию 2.1) решение уравнения (8) представляет собой сумму любого частного решения $y_{\text{чн}}$ этого уравнения и общего решения y_{oo} соответствующего ему однородного уравнения (1):

$$y = y_{\text{чн}} + y_{oo}$$

Частное решение $y_{\text{чн}}$ может быть найдено двумя способами:

1. методом неопределенных коэффициентов (методом подбора);

ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f(x) \tag{8}$$

Согласно теореме о структуре общего решения ЛНДУ (см. лекцию 2.1) решение уравнения (8) представляет собой сумму любого частного решения $y_{\text{чн}}$ этого уравнения и общего решения y_{oo} соответствующего ему однородного уравнения (1):

$$y = y_{\text{чн}} + y_{oo}$$

Частное решение $y_{\text{чн}}$ может быть найдено двумя способами:

1. методом неопределенных коэффициентов (методом подбора);
2. методом вариации произвольной постоянной.

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно использовать только в том случае, когда правая часть ЛНДУ (функция $f(x)$) имеет специальный вид:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right) \tag{9}$$

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно использовать только в том случае, когда правая часть ЛНДУ (функция $f(x)$) имеет специальный вид:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right) \tag{9}$$

$P_n(x)$ – многочлен степени n;

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно использовать только в том случае, когда правая часть ЛНДУ (функция $f(x)$) имеет специальный вид:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right) \tag{9}$$

$P_n(x)$ – многочлен степени n; $Q_m(x)$ – многочлен степени m;

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно использовать только в том случае, когда правая часть ЛНДУ (функция $f(x)$) имеет специальный вид:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right) \tag{9}$$

$P_n(x)$ – многочлен степени n; $Q_m(x)$ – многочлен степени m; α, β – известные числа.

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно использовать только в том случае, когда правая часть ЛНДУ (функция $f(x)$) имеет специальный вид:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right) \tag{9}$$

$P_n(x)$ – многочлен степени n; $Q_m(x)$ – многочлен степени m; α, β – известные числа. Если правая часть ЛНДУ имеет специальный вид (9), частное решение $y_{\text{чн}}$ ищут в виде:

$$y_{\text{чн}} = x^r\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_l^*(x)\cos(\beta x) + Q_l^*(x)\sin(\beta x)\right) \tag{10}$$

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно использовать только в том случае, когда правая часть ЛНДУ (функция $f(x)$) имеет специальный вид:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right) \tag{9}$$

$P_n(x)$ – многочлен степени n; $Q_m(x)$ – многочлен степени m; α, β – известные числа. Если правая часть ЛНДУ имеет специальный вид (9), частное решение $y_{\text{чн}}$ ищут в виде:

$$y_{\text{чн}} = x^r\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_l^*(x)\cos(\beta x) + Q_l^*(x)\sin(\beta x)\right) \tag{10}$$

$P_l^*(x), Q_l^*(x)$ – многочлены степени $l = \max(m; n)$ с неопределенными коэффициентами;

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно использовать только в том случае, когда правая часть ЛНДУ (функция $f(x)$) имеет специальный вид:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right) \tag{9}$$

$P_n(x)$ – многочлен степени n; $Q_m(x)$ – многочлен степени m; α, β – известные числа. Если правая часть ЛНДУ имеет специальный вид (9), частное решение $y_{\text{чн}}$ ищут в виде:

$$y_{\text{чн}} = x^r\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_l^*(x)\cos(\beta x) + Q_l^*(x)\sin(\beta x)\right) \tag{10}$$

$P_l^*(x), Q_l^*(x)$ – многочлены степени $l = \max(m; n)$ с неопределенными коэффициентами; r – кратность корня $\lambda = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (если среди корней характеристического уравнения нет корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$, то $r = 0$).

Суть метода неопределенных коэффициентов:

Суть метода неопределенных коэффициентов:

1. по виду правой части ЛНДУ записывают ожидаемую форму частного решения $y_{\text{чн}}$ в виде (10);

Суть метода неопределенных коэффициентов:

1. по виду правой части ЛНДУ записывают ожидаемую форму частного решения $y_{\text{чн}}$ в виде (10);
2. подставляют записанное в таком виде частное решение в уравнение (8);

Суть метода неопределенных коэффициентов:

1. по виду правой части ЛНДУ записывают ожидаемую форму частного решения $y_{\text{чн}}$ в виде (10);
2. подставляют записанное в таком виде частное решение в уравнение (8);
3. находят неопределенные коэффициенты многочленов $P_l^*(x), Q_l^*(x)$.

Вид многочленов $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ для различных значений степени l:

Вид многочленов $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ для различных значений степени l:

- $l = 0 \Longrightarrow A$

Вид многочленов $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ для различных значений степени l:

- $l = 0 \Longrightarrow A$
- $l = 1 \Longrightarrow Ax + B$

Вид многочленов $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ для различных значений степени l:

- $l = 0 \Longrightarrow A$
- $l = 1 \Longrightarrow Ax + B$
- $l = 2 \Longrightarrow Ax^2 + Bx + C$

Вид многочленов $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ для различных значений степени l:

- $l = 0 \Longrightarrow A$
- $l = 1 \Longrightarrow Ax + B$
- $l = 2 \Longrightarrow Ax^2 + Bx + C$
- $l = 3 \Longrightarrow Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Вид многочленов $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ для различных значений степени l:

- $l = 0 \Longrightarrow A$
- $l = 1 \Longrightarrow Ax + B$
- $l = 2 \Longrightarrow Ax^2 + Bx + C$
- $l = 3 \Longrightarrow Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
- $l = k \Longrightarrow Ax^k + Bx^{k-1} + \ldots + Cx + D$

коэффициенты $A, B, C, D, \ldots$ нужно найти.

Вид частного решения ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида правой части $f(x)$ (простейшие случаи):

Правая часть ЛНДУ	Вид частного решения	
	$\lambda = \alpha \pm i\beta$ НЕ является корнем характеристического уравнения	$\lambda = \alpha \pm i\beta$ является корнем кратности r характеристического уравнения
$f(x) = P_n(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \lambda = 0$	$y_{\text{чн}} = P_n^*(x)$	$y_{\text{чн}} = x^r P_n^*(x)$
$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P_n(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha \neq 0, \beta = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha$	$y_{\text{чн}} = \mathrm{e}^{\alpha x} P_n^*(x)$	$y_{\text{чн}} = x^r \mathrm{e}^{\alpha x} P_n^*(x)$
$f(x) = P_n(x)\cos(\beta x) +$ $+Q_m(x)\sin(\beta x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 0, \beta \neq 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\beta$	$y_{\text{чн}} = P_l^*(x)\cos(\beta x) +$ $+Q_l^*(x)\sin(\beta x),$ $l = \max(m; n)$	$y_{\text{чн}} = x^r(P_l^*(x)\cos(\beta x) +$ $+Q_l^*(x)\sin(\beta x)),$ $l = \max(m; n)$
$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) +$ $+Q_m(x)\sin(\beta x)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 0, \beta \neq 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\beta$	$y_{\text{чн}} = \mathrm{e}^{\alpha x}(P_l^*(x)\cos(\beta x) +$ $+Q_l^*(x)\sin(\beta x)),$ $l = \max(m; n)$	$y_{\text{чн}} = x^r \mathrm{e}^{\alpha x}(P_l^*(x)\cos(\beta x) +$ $+Q_l^*(x)\sin(\beta x)),$ $l = \max(m; n)$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$\left.\begin{array}{r} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{array}\right|$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{matrix}\alpha = -1 \\ \beta = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0,$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{matrix}\alpha = -1 \\ \beta = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{matrix}\alpha = -1 \\ \beta = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

$$k_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} =$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{matrix}\alpha = -1 \\ \beta = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

$$k_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} =$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

$$k_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm i \cdot 2}{2} =$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{matrix}\alpha = -1 \\ \beta = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

$$k_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm i \cdot 2}{2} = -1 \pm i$$

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{matrix}\alpha = -1 \\ \beta = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

$$k_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm i \cdot 2}{2} = -1 \pm i$$

Сравниваем λ и $k_{1;2}$.

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

$$k_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm i \cdot 2}{2} = -1 \pm i$$

Сравниваем λ и $k_{1;2}$. Числа λ являются корнями характеристического уравнения;

Пример

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x\cos x + \sin x) \quad (*)$$

$P_n(x) = x,\ Q_m(x) = 1,$

$$\left.\begin{matrix}\alpha = -1 \\ \beta = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4,$$

$$k_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm i \cdot 2}{2} = -1 \pm i$$

Сравниваем λ и $k_{1;2}$. Числа λ являются корнями характеристического уравнения; кратность корней равна $1 \Rightarrow r = 1$.

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения.

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения. Форма частного решения повторяет форму правой части уравнения.

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения. Форма частного решения повторяет форму правой части уравнения.

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad$ $y_{\text{чн}}(x) = \mathrm{e}^{-x}$

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения. Форма частного решения повторяет форму правой части уравнения.

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ (\underline{x}\cos x$ $\qquad\qquad$ $y_{\text{чн}}(x) = \mathrm{e}^{-x}(\underline{[Ax+B]}\cos x +$

x заменяем на $Ax + B$;

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения. Форма частного решения повторяет форму правой части уравнения.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ (\underline{x} \cdot \cos x + \underline{\underline{1}} \cdot \sin x) \qquad y_{\text{чн}}(x) = \mathrm{e}^{-x}(\underline{[Ax+B]}\cos x + \underline{\underline{[Cx+D]}}\sin x)$$

x заменяем на $Ax + B$; 1 заменяем на $Cx + D$;

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения. Форма частного решения повторяет форму правой части уравнения.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ (\underline{x} \cdot \cos x + \underline{\underline{1}} \cdot \sin x) \qquad y_{\text{чн}}(x) = \mathrm{e}^{-x}(\underline{[Ax+B]} \cos x + \underline{\underline{[Cx+D]}} \sin x)$$

x заменяем на $Ax+B$; 1 заменяем на $Cx+D$; так как λ является корнем кратности 1 характеристического уравнения, умножаем полученное для частного решения выражение на x в степени 1.

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения. Форма частного решения повторяет форму правой части уравнения.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ (\underline{x} \cdot \cos x + \underline{\underline{1}} \cdot \sin x) \qquad y_{\text{чн}}(x) = \mathrm{e}^{-x}(\underline{[Ax+B]} \cos x + \underline{\underline{[Cx+D]}} \sin x) \cdot x$$

x заменяем на $Ax+B$; 1 заменяем на $Cx+D$; так как λ является корнем кратности 1 характеристического уравнения, умножаем полученное для частного решения выражение на x в степени 1.

Пример (продолжение)

Подбираем форму частного решения. Форма частного решения повторяет форму правой части уравнения.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ (\underline{x} \cdot \cos x + \underline{\underline{1}} \cdot \sin x) \qquad y_{\text{чн}}(x) = \mathrm{e}^{-x}(\underline{[Ax+B]} \cos x + \underline{\underline{[Cx+D]}} \sin x) \cdot x$$

x заменяем на $Ax+B$; 1 заменяем на $Cx+D$; так как λ является корнем кратности 1 характеристического уравнения, умножаем полученное для частного решения выражение на x в степени 1.

Теперь можно подставить частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ в заданное уравнение $(*)$ и найти коэффициенты A, B, C, D.

Замечания:

1. После подстановки функции (10) в уравнение (8) нужно приравнять многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.

Замечания:

1. После подстановки функции (10) в уравнение (8) нужно приравнять многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.
2. Форма (10) сохраняется в тех случаях, когда $P_n(x) = 0$ или $Q_m(x) = 0$.

Замечания:

1. После подстановки функции (10) в уравнение (8) нужно приравнять многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.
2. Форма (10) сохраняется в тех случаях, когда $P_n(x) = 0$ или $Q_m(x) = 0$.
3. Если правая часть уравнения (8) представляет собой сумму нескольких функций вида (9), то для нахождения частного решения нужно разбить такое уравнение на несколько простых (используем теорему о наложении решений – см. лекцию 2.1).

Пример

$$y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^{x}\cos(2x) + x^2 - x + 2$$

Пример

$$y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos(2x) + x^2 - x + 2$$

1. Находим общее решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Пример

$$y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos(2x) + x^2 - x + 2$$

1. Находим общее решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = 0$.
2. Находим частное решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos(2x)$.

Пример

$$y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos(2x) + x^2 - x + 2$$

1. Находим общее решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = 0$.
2. Находим частное решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos(2x)$.
3. Находим частное решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = x^2 - x + 2$.

Пример

$$y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos(2x) + x^2 - x + 2$$

1. Находим общее решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = 0$.
2. Находим частное решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos(2x)$.
3. Находим частное решение ДУ $y'' + 2y' + 5y = x^2 - x + 2$.
4. Складываем решения, полученные в пунктах 1-3. Это и будет общее решение исходного уравнения.

Метод вариации постоянных (метод Лагранжа)

Метод вариации постоянных (метод Лагранжа)

Если известна ФСР $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ однородного уравнения $L[y] = 0$, то общее решение соответствующего неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ можно найти методом Лагранжа вариации постоянных.

Метод вариации постоянных (метод Лагранжа)

Если известна ФСР $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ однородного уравнения $L[y] = 0$, то общее решение соответствующего неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ можно найти методом Лагранжа вариации постоянных.

Это метод можно применять при решении ЛНДУ как с переменными коэффициентами, так и с постоянными.

Метод вариации постоянных (метод Лагранжа)

Если известна ФСР $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ однородного уравнения $L[y] = 0$, то общее решение соответствующего неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ можно найти методом Лагранжа вариации постоянных.

Это метод можно применять при решении ЛНДУ как с переменными коэффициентами, так и с постоянными.

Метод Лагранжа позволяет найти решение ЛНДУ с любой правой частью – в том числе в тех случаях, когда правая часть ЛНДУ не совпадает с формулой (9) и не является частным случаем этой формулы.

Применение метода Лагранжа к решению ЛНДУ второго порядка

ЛНДУ второго порядка:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{11}$$

ЛНДУ второго порядка:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{11}$$

Соответствующее ему однородное уравнение:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{12}$$

ЛНДУ второго порядка:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{11}$$

Соответствующее ему однородное уравнение:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{12}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{13}$$

ЛНДУ второго порядка:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{11}$$

Соответствующее ему однородное уравнение:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{12}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{13}$$

C_1, C_2 – произвольные постоянные;

ЛНДУ второго порядка:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{11}$$

Соответствующее ему однородное уравнение:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{12}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{13}$$

C_1, C_2 – произвольные постоянные;

$y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальная система решений.

Суть метода Лагранжа:

1. Предполагаем, что частное решение $y_{\text{чн}}$ ЛНДУ (11) имеет такой же вид, как и общее решение однородного, но отличается от него тем, что постоянные C_1, C_2 заменены на некоторые (пока неизвестные) функции $C_1(x), C_2(x)$:

$$y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{14}$$

Суть метода Лагранжа:

1. Предполагаем, что частное решение $y_{\text{чн}}$ ЛНДУ (11) имеет такой же вид, как и общее решение однородного, но отличается от него тем, что постоянные C_1, C_2 заменены на некоторые (пока неизвестные) функции $C_1(x), C_2(x)$:

$$y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{14}$$

2. Предполагаем, что функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют условию

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{15}$$

Для нахождения функций $C_1(x), C_2(x)$ необходимо подставить частное решение (14) и его производные в уравнение (11).

Для нахождения функций $C_1(x), C_2(x)$ необходимо подставить частное решение (14) и его производные в уравнение (11).

Находим первую производную:

$$y'_{\text{чн}} = C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C_1 y'_1 + C_2 y'_2 =$$

Для нахождения функций $C_1(x), C_2(x)$ необходимо подставить частное решение (14) и его производные в уравнение (11).

Находим первую производную:

$$y'_{\text{чн}} = \underbrace{C_1'y_1 + C_2'y_2}_{=0} + C_1y_1' + C_2y_2' = \left| \begin{array}{c} \text{учтем} \\ \text{условие } (15) \end{array} \right| =$$

Для нахождения функций $C_1(x), C_2(x)$ необходимо подставить частное решение (14) и его производные в уравнение (11).

Находим первую производную:

$$y'_{\text{чн}} = \underbrace{C_1'y_1 + C_2'y_2}_{=0} + C_1y_1' + C_2y_2' = \left| \begin{array}{c} \text{учтем} \\ \text{условие } (15) \end{array} \right| = C_1y_1' + C_2y_2'$$

Для нахождения функций $C_1(x), C_2(x)$ необходимо подставить частное решение (14) и его производные в уравнение (11).

Находим первую производную:

$$y'_{\text{чн}} = \underbrace{C_1'y_1 + C_2'y_2}_{=0} + C_1y_1' + C_2y_2' = \left| \begin{array}{c} \text{учтем} \\ \text{условие } (15) \end{array} \right| = C_1y_1' + C_2y_2'$$

Находим вторую производную:

$$y''_{\text{чн}} = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$$

Подставим $y_{\text{чн}}, y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}$ в уравнение (11):

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + a(C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

Подставим $y_{\text{чн}}, y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}$ в уравнение (11):

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a(C_1y_1' + C_2y_2') + b(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Подставим $y_{\text{чн}}, y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}$ в уравнение (11):

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a(C_1y_1' + C_2y_2') + b(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$C_1(\underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{=0}) + C_2(\underbrace{y_2'' + ay_2' + by_2}_{=0}) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Так как y_1, y_2 – частные решения однородного уравнения (12), то выражения, стоящие в скобках равны нулю.

Подставим $y_{\text{чн}}, y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}$ в уравнение (11):

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a(C_1y_1' + C_2y_2') + b(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$C_1(\underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{=0}) + C_2(\underbrace{y_2'' + ay_2' + by_2}_{=0}) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Так как y_1, y_2 – частные решения однородного уравнения (12), то выражения, стоящие в скобках равны нулю.

Тогда

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Вывод: функция $y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет частным решением уравнения $y'' + ay' + by = f(x)$, если функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \tag{16}$$

Вывод: функция $y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет частным решением уравнения $y'' + ay' + by = f(x)$, если функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \tag{16}$$

Так как функции $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимы, определитель этой системы отличен от нуля:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Вывод: функция $y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет частным решением уравнения $y'' + ay' + by = f(x)$, если функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \tag{16}$$

Так как функции $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимы, определитель этой системы отличен от нуля:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Поэтому система (16) имеет единственное решение:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1, y_2]}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1, y_2]} \tag{17}$$

Вывод: функция $y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет частным решением уравнения $y'' + ay' + by = f(x)$, если функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \tag{16}$$

Так как функции $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимы, определитель этой системы отличен от нуля:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Поэтому система (16) имеет единственное решение:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1, y_2]}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1, y_2]} \tag{17}$$

Решения (17) необходимо проинтегрировать и подставить найденные $C_1(x), C_2(x)$ в $y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$.