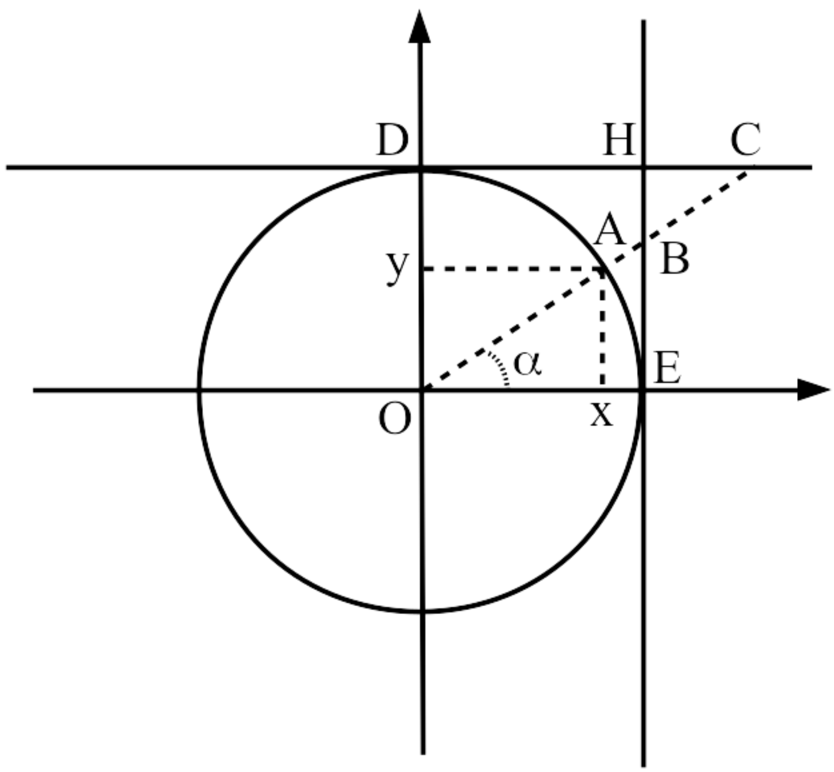
Занятия 2.2-2.3
Тригонометрические формулы

1 Тригонометрические функции

Тригонометрические функции определяются с помощью тригонометрической окружности (окружности единичного радиуса с центром в начале координат) и двух прямых - тангенсальной и котангенсальной.



На рисунке показана тригонометрическая окружность, тангенсальная прямая EH и котангенсальная прямая DH.

На тригонометрической окружности выбираем произвольную точку A с координатами x, y и проводим через нее прямую OA под углом α к оси x. Прямая OA пересекает тангенсальную прямую в точке B, а котангенсальную - в точке C. Тогда тригонометрические функции определяются следующим образом:

$\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{x} = \mathrm{EB}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{y} = \mathrm{DC}$.

2 Основные тригонометрические соотношения

Основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Соотношения между тригонометрическими функциями:

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$,

$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

Выражение функций через тангенс половинного угла:

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Формулы сложения и вычитания

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$
$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$
$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},$
$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$

Формулы двойного угла
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$
$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$
$\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$

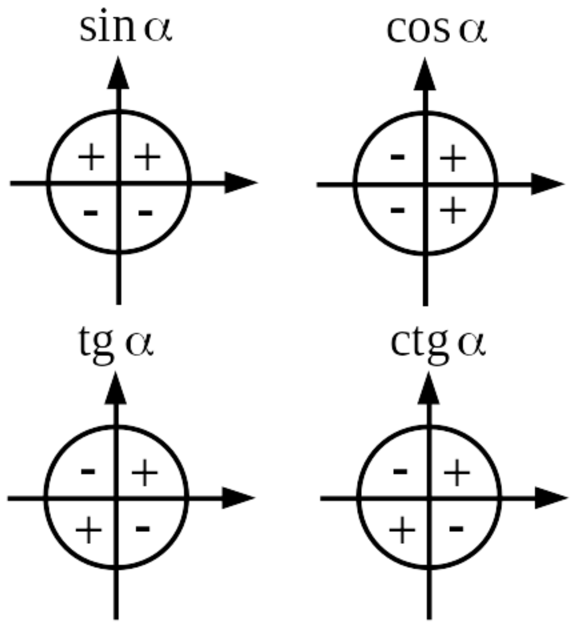
Формулы понижения степени
$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2},$
$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}.$

Формулы преобразования произведения в сумму или разность
$\sin\alpha\sin\beta=0.5[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$
$\sin\alpha\cos\beta=0.5[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$
$\cos\alpha\cos\beta=0.5[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$

Формулы преобразования суммы или разности в произведение
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2},$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Знаки тригонометрических функций



Формулы приведения

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$

3 Решение типовых задач

1. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = 5/13$, $\pi/2 < \alpha < \pi$.
Решение:
Используем основное тригонометрическое тождество:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
Откуда
$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.
Т.к. $\pi/2 < \alpha < \pi$, т.е. α находится во II четверти, то $\cos\alpha < 0$.
Тогда
$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -12/13$,
$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha = -5/12$,
$\operatorname{ctg}\alpha = 1/\operatorname{tg}\alpha = -12/5$.

2. Вычислить $\cos\dfrac{8\pi}{3}$.
Решение:
$\cos\dfrac{8\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) =$
$\cos\alpha$ - периодическая функция с периодом 2π
$= \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) =$
используем формулы приведения
$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

3. Найти $\dfrac{(2+2\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)(2-2\cos\alpha)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.
Решение:
$\dfrac{(2+2\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)(2-2\cos\alpha)} = \dfrac{2(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} =$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ - формула сокращенного умножения

$$= \frac{(1-\sin^2\alpha)}{(1-\cos^2\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha = 4.$$

4. Найти $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 4$.
Решение:
Выражаем $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через тангенс половинного угла.
$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \dfrac{1}{4}.$

5. Упростить $3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$
Решение:
$3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 2 + 4\cos 2\alpha + (1+\cos 4\alpha) =$
используем формулу понижения степени
$= 2 + 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha = 2(1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) =$
$= 2(1+\cos 2\alpha)^2 =$
снова используем формулу понижения степени
$= 2(2\cos^2\alpha)^2 = 8\cos^4\alpha.$

6. Упростить $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
Решение:
$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$
$= \dfrac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \dfrac{2}{\sin\alpha}.$

7. Доказать тождество
$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$
Решение:
$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha =$
$= (\cos\alpha + \cos 7\alpha) + (\cos 2\alpha + \cos 6\alpha) =$
используем формулы преобразования суммы в произведение

$= 2\cos 4\alpha \cos 3\alpha + 2\cos 4\alpha \cos 2\alpha = 2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha + \cos 2\alpha) =$

снова используем формулы преобразования суммы в произведение

$= 4\cos 4\alpha \cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}.$

8. Доказать тождество

$\operatorname{tg} 4\alpha - \dfrac{1}{\cos 4\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}.$

Решение:

$\operatorname{tg} 4\alpha - \dfrac{1}{\cos 4\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg} 4\alpha \cos 4\alpha - 1}{\cos 4\alpha} = \dfrac{\sin 4\alpha - 1}{\cos 4\alpha} =$

используя основное тригонометрическое тождество, заменим 1 в числителе как $1 = \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha$, а $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ разложим по формулам двойного угла

$= \dfrac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha - (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha)}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$

используем формулы сокращенного умножения:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ и $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$= \dfrac{-(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \dfrac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}.$

4 Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$.
2. Вычислить $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{35}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.
3. Найти знак $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.
4. Вычислить $\cos 3\alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.
5. Упростить $\operatorname{ctg}(-\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha) - \sin^2(-\alpha)$.
6. Упростить $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta}$.
7. Упростить $\sin(\pi - 2\alpha) + 2\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$.

8. Найти $\dfrac{8}{\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)}$.

9. Упростить $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - x)\sin(\frac{3\pi}{2} + x)}{\cos(\pi + x)\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + x)}$.