Занятие 2.1
Модуль действительного числа. Раскрытие знака модуля. Модульные неравенства.

1 Модуль действительного числа

Модуль действительного числа определяется по формуле:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Примеры: $|3| = 3$, $|-3| = 3$.

Свойства модуля:

1) $|x| = |-x|$,
2) $|x|^2 = x^2$,
3) $\sqrt{x^2} = |x|$,
4) $|x| \geq 0$,
5) $|c \cdot x| = c \cdot |x|$, если $c > 0$,
6) если $|x| = |y|$, то $x = y$ или $x = -y$,
7) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

2 Раскрытие знака модуля

Знак модуля раскрывается согласно его определению.

1. $|2x - 5|$.

Решение:

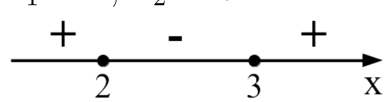
$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, & 2x-5 \geq 0, \\ -2x+5, & 2x-5 < 0, \end{cases} = \begin{cases} 2x-5, & x \geq 5/2, \\ -2x+5, & x < 5/2. \end{cases}$$

2. $|-4x+6|$.
Решение:
$|-4x+6| = \begin{cases} -4x+6, & -4x+6 \geq 0, \\ 4x-6, & -4x+6 < 0, \end{cases} = \begin{cases} -4x+6, & x \leq 3/2, \\ 4x-6, & x > 3/2. \end{cases}$

3. $|x^2+1|$.
Решение:
$|x^2+1| = x^2+1\ \forall x \in R$.

4. $|-x^2-1|$.
Решение:
$|-x^2-1| = x^2+1\ \forall x \in R$.

5. $|x^2-5x+6|$.
Решение:
Чтобы раскрыть знак модуля, надо найти интервалы знакопостоянства подмодульного выражения. Для этого, в свою очередь, необходимо определить его нули.
$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=3$.



$x^2-5x+6 \geq 0$ при $x \in (-\infty;2] \cup [3;+\infty)$,
$x^2-5x+6 < 0$ при $x \in (2;3)$.
Тогда
$|x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6, & x \in (-\infty;2] \cup [3;+\infty), \\ -x^2+5x-6, & x \in (2;3). \end{cases}$

3 Модульные неравенства

А. $|f(x)| < g(x)$

Данное модульное неравенство эквивалентно системе двух обычных неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

1. $|2x+3| < x+7$.

Решение:

Раскрываем знак модуля путем перехода к системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x+3 < x+7, \\ 2x+3 > -(x+7). \end{cases}$$

Решая каждое из неравенств системы, получим:

$$\begin{cases} x < 4, \\ x > -10/3. \end{cases}$$

Объединив оба решения, получим ответ для исходного модульного неравенства:

$x \in (-10/3; 4)$.

2.$|x^2+2x-3| + 3(x+1) < 0$.

Решение:

Сначала переносим все члены данного неравенства, не содержащие знак модуля, в правую часть:

$|x^2+2x-3| < -3(x+1)$.

Теперь раскрываем знак модуля и переходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+2x-3 < -3(x+1), \\ x^2+2x-3 > 3(x+1). \end{cases}$$

Упрощаем:

$$\begin{cases} x^2+5x < 0, \\ x^2-x-6 > 0. \end{cases}$$

Каждое неравенство данной системы решается методом интервалов. Получаем:

$$\begin{cases} x \in (-5; 0), \\ x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty). \end{cases}$$

Объединив оба решения, получаем ответ:
$x \in (-5, -2)$.

Б. $|f(x)| > g(x)$

Данное модульное неравенство решается путем перехода к совокупности двух обычных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

1. $|3x + 1| > 5 - 4x$.

Решение:

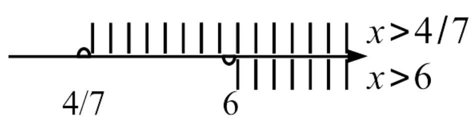
Раскрываем знак модуля:

$$\left[\begin{array}{l} 3x + 1 > 5 - 4x, \\ 3x + 1 < -(5 - 4x). \end{array}\right.$$

Откуда имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x > 4/7, \\ x > 6. \end{array}\right.$$

Объединять ответы в случае совокупности сложнее, чем в случае системы. Здесь лучше использовать графический метод. Для этого выделим на числовой прямой получившиеся промежутки - над прямой отмечается первое решение $x > 4/7$, а под прямой указывается второе решение $x > 6$:



Число x является решением совокупности двух неравенств, если оно является решением хотя бы одного из них. Поэтому в состав решения включаются все точки числовой прямой, которые попадают в промежутки, заштрихованные хотя бы с одной стороны (сверху или снизу). В нашем случае ответ получается такой:

$x \in (4/7; +\infty)$.

2. $|x^2 + 2x - 3| > x$.

Решение:

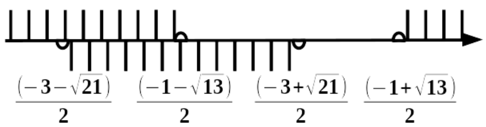
Раскрываем знак модуля:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 > x, \\ x^2 + 2x - 3 < -x. \end{array}\right.$$

Каждое из неравенств решаем методов интервалов:

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty), \\ x \in (\frac{-3-\sqrt{21}}{2}; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}). \end{array}\right.$$

Отмечаем решения на числовой прямой:



Формируем решение исходного модульного неравенства, включая в него все точки числовой прямой, которые попадают в промежутки, заштрихованные хотя бы с одной стороны:

$x \in (-\infty; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$.

B. $|f(x)| > |g(x)|$

Данное модульное неравенство заменяется одним простым неравенством:

$f^2(x) > g^2(x)$.

1. $|x + 2| > |1 - 2x|$.

Решение:

Избавляемся от знака модуля:

$(x + 2)^2 > (1 - 2x)^2$,

$3x^2 - 8x - 3 < 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим:

$x \in (-1/3; 3)$.