Занятие 1.4
Деление многочлена на многочлен. Разложение многочлена на множители методами группировки и выделения целых корней.

1 Деление многочлена на многочлен

Деление многочлена на многочлен производится столбиком (уголком). Рассмотрим данный алгоритм на конкретных примерах.

А. Разделить многочлен $4x^4+2x^3-x^2+2$ на многочлен x^2-2x+1.

Первый многочлен называется делимым, а второй - делителем. Теперь последовательно выполняем пункты:

1. Если в делимом или делителе отсутствует какая-либо промежуточная степень, то дописываем ее с нулевым коэффициентом. В данном примере у делителя присутствуют все степени (от 0 до 2), а у делимого отсутствует первая степень (в диапазоне от 0 до 4). Поэтому дописываем ее с нулевым коэффициентом:

$4x^4+2x^3-x^2+2 = 4x^4+2x^3-x^2+\mathbf{0x}+2$

2. Формируем уголок. Делимое пишем слева от уголка, а делитель - в уголке на полочке:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3-x^2+0x+2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

3. Делим старшую степень делимого $4x^4$ на старшую степень делителя x^2 и записываем результат в уголок под полочку:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3-x^2+0x+2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} & 4x^2 \end{array}$$

4. Умножаем делитель на получившийся одночлен $4x^2$ и записываем результат под делимым слева от уголка, причем одинаковые степени должны стоять друг под другом:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3\ \ -x^2+0x+2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} 4x^4-8x^3+4x^2 & 4x^2 \end{array}$$

5. Производим вычитание:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3\ \ -x^2+0x+2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{4x^4-8x^3+4x^2} & 4x^2 \\ \qquad 10x^3-5x^2 & \end{array}$$

6. Сносим вниз первый незадействованный в расчетах одночлен делимого:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3\ \ -x^2+0x+2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{4x^4-8x^3+4x^2} & 4x^2 \\ \qquad 10x^3-5x^2+0x & \end{array}$$

7. Применяем пункты 3-5 к получившемуся многочлену $10x^3-5x^2+0x$, т.е. делим его старшую степень $10x^3$ на старшую степень делителя x^2 и записываем результат деления $10x$ под полочкой, умножаем делитель на данный одночлен и размещаем результат под исходным многочленом, производим вычитание:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3\ \ \ -x^2\ \ +0x+2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{4x^4-8x^3\ \ +4x^2} & 4x^2+10x \\ \qquad 10x^3\ \ -5x^2\ \ +0x & \\ \qquad \underline{10x^3-20x^2+10x} & \\ \qquad\qquad\quad 15x^2-10x & \end{array}$$

8. Сносим вниз последний незадействованный в расчетах одночлен делимого:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +2x^3 & -x^2 & +0x & +2 & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6}
4x^4 & -8x^3 & +4x^2 & & & 4x^2+10x \\ \cline{1-3}
 & 10x^3 & -5x^2 & +0x & & \\
 & 10x^3 & -20x^2 & +10x & & \\ \cline{2-4}
 & & 15x^2 & -10x & +2 &
\end{array}$$

9. Снова выполняем пункты 3-5 по отношению к последнему получившемуся многочлену $15x^2 - 10x + 2$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +2x^3 & -x^2 & +0x & +2 & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6}
4x^4 & -8x^3 & +4x^2 & & & 4x^2+10x+15 \\ \cline{1-3}
 & 10x^3 & -5x^2 & +0x & & \\
 & 10x^3 & -20x^2 & +10x & & \\ \cline{2-4}
 & & 15x^2 & -10x & +2 & \\
 & & 15x^2 & -30x & +15 & \\ \cline{3-5}
 & & & 20x & -13 &
\end{array}$$

10. Поскольку степень получившегося многочлена стала меньше степени делителя, процесс деления прекращаем и выписываем ответ:

$$\frac{4x^4 + 2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1} = 4x^2 + 10x + 15 + \frac{20x - 13}{x^2 - 2x + 1}$$

Здесь $20x-13$ - остаток от деления $4x^4+2x^3-x^2+2$ на x^2-2x+1.

Б. Разделить многочлен $x^3 + 6x^2 - 8x + 1$ на многочлен $x^2 - 2$.

Решение:

Так как в делителе $x^2 - 2$ отсутствует первая степень, добавляем ее с нулевым коэффциентом:

$x^2 - 2 = x^2 + \mathbf{0x} - 2$.

Тогда имеем:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +6x^2 & -8x & +1 & x^2+0x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & +0x^2 & -2x & & x+6 \\ \cline{1-3}
 & 6x^2 & -6x & +1 & \\
 & 6x^2 & +0x & -12 & \\ \cline{2-4}
 & & -6x & +13 &
\end{array}$$

Как только степень делимого при делении становится меньше степени делителя, процесс деления останавливаем, при этом оставшееся делимое будет служить остатком от деления исходного многочлена на делитель.

Ответ: $\dfrac{x^3+6x^2-8x+1}{x^2-2}=x+6+\dfrac{-6x+13}{x^2-2}$.

2 Разложение многочлена на множители методом выделения целых корней

1. $2x^3-5x^2-4x+3$.

Решение:

Целые корни многочлена находятся среди делителей свободного члена. Делителями числа 3 являются ±1 и ±3. Проверяем, какое из этих чисел есть корень:

$+1$: $2\cdot1^3-5\cdot1^2-4\cdot1+3=-4\neq0\Rightarrow+1$ не есть корень

-1: $2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)+3=0\Rightarrow-1$ есть корень.

Как только нашли первый целый корень, процесс проверки прекращаем.

Корень x_0 любого многочлена P_n обладает тем свойством, что двучлен $x-x_0$ делит многочлен P_n без остатка. Разделим исходный многочлен $2x^3-5x^2-4x+3$ на $x-(-1)=x+1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & -4x & +3 & x+1 \\ \cline{5-5}
2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2-7x+3 \\ \cline{1-2}
 & -7x^2 & -4x & & \\
 & -7x^2 & -7x & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x & +3 & \\
 & & 3x & +3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Поскольку остаток от деления равен нулю, получаем:

$$\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{x+1}=2x^2-7x+3$$

или

$2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)$

Осталось разложить на множители квадратный трехчлен $2x^2-7x+3$.

Используем стандартную формулу

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1, x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Особо необходимо обратить внимание на число a перед множителями в разложении квадратного трехчлена. Часто это число теряется, что приводит к неверным результатам.

$2x^2-7x+3=0 \Rightarrow x_1=3$, $x_2=0.5$.

Тогда

$2x^2-7x+3=\mathbf{2}(x-3)(x-0.5)$

и

$2x^3-5x^2-4x+3=2(x+1)(x-3)(x-0.5)$.

Ответ: $2x^3-5x^2-4x+3=2(x+1)(x-3)(x-0.5)$.

2. x^3+3x^2+3x+2.

Решение:

Находим делители свободного члена - это ±1, ±2. Подставляя их в исходный многочлен, определяем корень (-2). Далее, делим многочлен на двучлен $x-(-2)=x+2$ и получаем

$$\frac{x^3+3x^2+3x+2}{x+2}=x^2+x+1$$

или

$x^3+3x^2+3x+2=(x+2)(x^2+x+1)$.

Квадратный трехчлен x^2+x+1 не имеет действительных корней. Следовательно, дальнейшее разложение невозможно, а исходный многочлен можно представить лишь в виде произведения линейного двучлена на квадратный трехчлен.

Ответ: $x^3+3x^2+3x+2=(x+2)(x^2+x+1)$.

3 Разложение многочлена на множители методом группировки

Метод группировки заключается в объединении членов многочлена в группы, из которых можно выделить общий множитель, применяя, например, формулы сокращенного умножения.

1. $x^3 + 2x^2 - x - 2$.
Решение:
$x^3 + 2x^2 - x - 2 =$
Группируем члены многочлена: первый со вторым и третий с четвертым.
$= (x^3 + 2x^2) - (x + 2) = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x^2 - 1)(x + 2) =$
$= (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.
Ответ: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

2. $x^4 - x^2 - 4x - 4$.
Решение:
$x^4 - x^2 - 4x - 4 =$
Группируем члены многочлена: второй, третий и четвертый.
$= x^4 - (x^2 + 4x + 4) = x^4 - (x + 2)^2 = (x^2 - (x + 2))(x^2 + (x + 2)) =$
$= (x^2 - 1 - x - 1)(x^2 + x + 2) = ((x - 1)(x + 1) - (x + 1))(x^2 + x + 2) =$
$= (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 2)$.
Ответ: $x^4 - x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 2)$.

3. $x^3 + x^2 - 2x - 8$.
Решение:
$x^3 + x^2 - 2x - 8 =$
Группируем члены многочлена: первый с четвертым и второй с третьим.
$= (x^3 - 8) + (x^2 - 2x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + x(x - 2) =$
$= (x - 2)(x^2 + 3x + 4)$.

Ответ: $x^3 + x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(x^2 + 3x + 4)$.