Занятие 1.3
Формулы сокращенного умножения. Исключение иррациональности из числителя или знаменателя дроби.

1 Формулы сокращенного умножения

N	формула	название
1.	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	квадрат суммы
2.	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	квадрат разности
3.	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	разность квадратов
4.	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	куб суммы
5.	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	куб разности
6.	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	сумма кубов
7.	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	разность кубов

Формулы сокращенного умножения действуют в обе стороны - слева направо и справа налево. Например,
$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ и $(y-3)(y+3) = y^2 - 9$,
$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ и $9y^2 - 6y + 1 = (3y-1)^2$.

Во всех указанных ниже задачах необходимо упростить приведенные выражения с помощью формул сокращенного умножения.

А. Задачи с решениями

1. $x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4$.
Решение:

$x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 4y^2 + (4y^2)^2 =$
$= \Big|(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, a = x^2, b = 4y^2\Big| = (x^2 + 4y^2)^2.$

2. $(x^2 + 7)(x^2 - 7)$.
Решение:
$(x^2 + 7)(x^2 - 7) = \Big|a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), a = x^2, b = 7\Big| =$
$= x^4 - 49.$

3. $(0.2a^3 + 5)(5 - 0.2a^3)$.
Решение:
$(0.2a^3 + 5)(5 - 0.2a^3) = (5 + 0.2a^3)(5 - 0.2a^3) =$
$= \Big|a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), a = 5, b = 0.2a^3\Big| = 25 - 0.04a^6.$

4. $x^2 - y^2 - 8(x-y)^2$.
Решение:
$x^2 - y^2 - 8(x-y)^2 = (x-y)(x+y) - 8(x-y)^2 =$
$= (x-y)(x + y - 8x + 8y) = (x-y)(9y - 7x).$

Б. Задачи для самостоятельного решения

1. $(b-2)(b+2)(b^2+4)$.
2. $(a+4)^2(4-a)^2$.
3. $(4b+9)^2 - 8b(5b+9)$.
4. $\dfrac{49a^2 - b^2}{8a^2} \cdot \dfrac{a}{14a - 2b}$.
5. $\dfrac{x^2 - 25y^2}{x^2 - 10xy + 25y^2}$.
6. $(5x - 15)(5x + 15) - 25x^2 + 10x - 10$.

2 Исключение иррациональности из числителя или знаменателя дроби

Во всех следующих задачах необходимо исключить иррациональность из числителя (знаменателя) дроби, при этом допускается появление иррациональности в знаменателе (числителе) дроби. Исключение иррациональности производится с помощью формул сокращенного умножения. Формула разности квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ позволяет избавится от иррациональности, когда в числителе (знаменателе) дроби стоят выражения с квадратными корнями $\sqrt{A}-\sqrt{B}$, $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, где A, B - некоторые подкоренные выражения. В свою очередь, формулы суммы и разности кубов $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ помогают исключить иррациональности при наличии кубических корней $\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}$, $\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$, где A, B - по-прежнему некоторые подкоренные выражения.

A. Задачи с решениями

1. $\dfrac{x+2}{\sqrt{x}-3}$.

Решение:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}-3} =$$

Здесь: умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, т.е. на $\sqrt{x}+3$.

$$= \frac{(x+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} =$$

Здесь: теперь сворачивем знаменатель по формуле разности квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$= \dfrac{(x+2)(\sqrt{x}+3)}{x-9}.$

Иррациональность из знаменателя исключена.

2. $\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{x^2+x}.$

Решение:

$\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{x^2+x} =$

Здесь: умножаем числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы членов 1 и $\sqrt[3]{x}$, т.е. на $1^2 + 1 \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2$.

$= \dfrac{(1-\sqrt[3]{x})(1^2 + 1 \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)}{(x^2+x)(1^2 + 1 \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} =$

Здесь: теперь сворачиваем числитель по формуле разности кубов $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$= \dfrac{(1-x)}{(x^2+x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}.$

Иррациональность из числителя исключена.

3. $\sqrt{x^2+x+1} - x.$

Решение:

$\sqrt{x^2+x+1} - x =$

Здесь: представляем наше выражение в виде дроби со знаменателем 1.

$= \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - x}{1} =$

Здесь: умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю.

$$= \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$$

Здесь: теперь сворачиваем числитель по формуле разности квадратов.

$$= \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

4. $\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$.

Решение:

$$\frac{5}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} =$$

Здесь: умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, и сворачиваем знаменатель по формуле разности квадратов.

$$= \frac{5(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$$

Здесь: повторяем предыдущее преобразование.

$$= \frac{5(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}.$$

Б. Задачи для самостоятельного решения

1. $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

2. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}}$.

3. $\dfrac{x}{(\sqrt[4]{x^2+1})^{15}}$.

4. $\dfrac{3}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.