

Занятие 1.2

Свойства и графики основных элементарных функций

Для каждой функции указывается область определения $D(y)$, множество значений $E(y)$, четность (четная, нечетная, общего вида) и приводится график. У периодических функций приводится период и основной промежуток. Для ряда функций даются предельные значения на границах их области определения. Если функция или ее график имеют общепринятые названия, то они также указываются.

1. Степенные функции вида $y = x^\alpha$

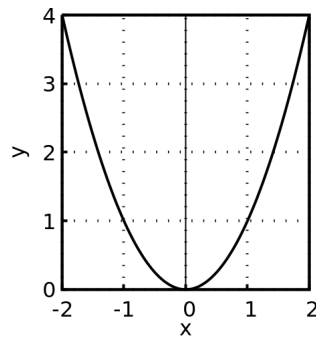
а) $y = x^2$ - квадратичная функция

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = [0; +\infty)$$

функция четная: $(-x)^2 = x^2$

график - парабола



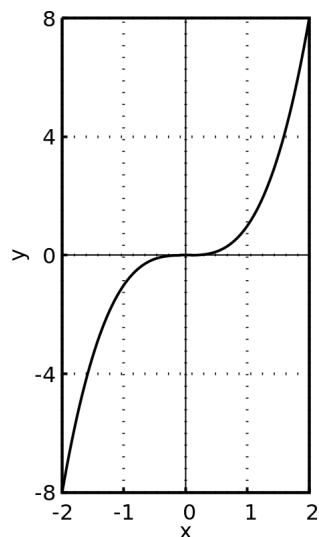
б) $y = x^3$ - кубическая функция

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

функция нечетная: $(-x)^3 = -x^3$

график - кубическая парабола



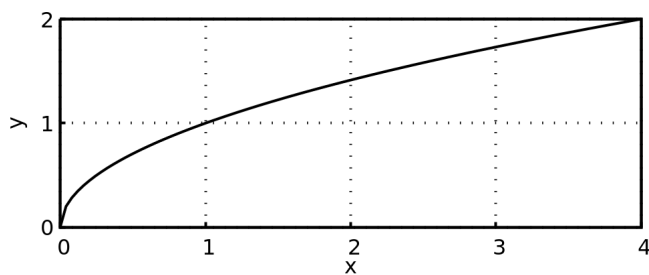
в) $y = \sqrt{x}$

$$D(y) = [0; +\infty)$$

$$E(y) = [0; +\infty)$$

функция общего вида

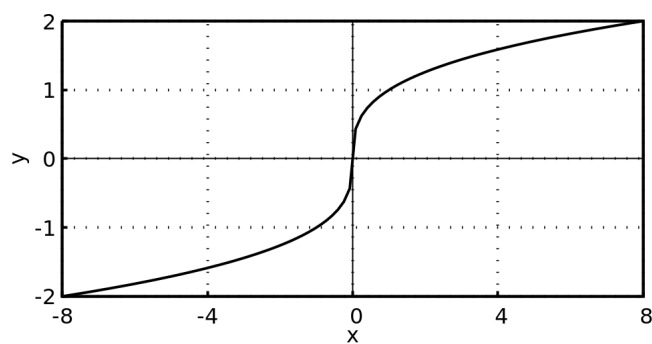
график - ветвь параболы



г) $y = \sqrt[3]{x}$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$

$E(y) = (-\infty; +\infty)$

функция нечетная: $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ 

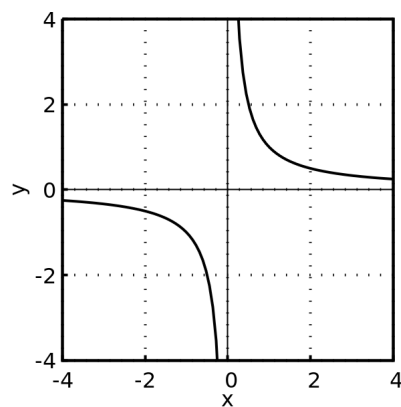
д) $y = 1/x$

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

функция нечетная: $1/(-x) = -(1/x)$

график - гипербола



2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

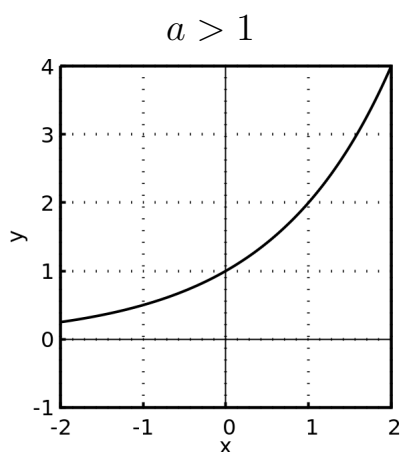
$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = (0; +\infty)$$

функция общего вида

Частный случай показательной функции:

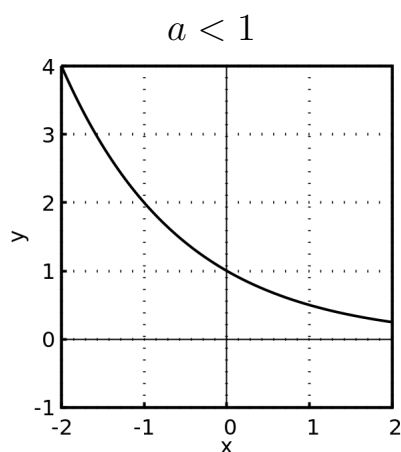
$a = e : y = e^x$ - экспоненциальная функция или экспонента



$$a^x \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

$$a^x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty$$

$$a^x = 1 \text{ при } x = 0$$



$$a^x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

$$a^x \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow -\infty$$

$$a^x = 1 \text{ при } x = 0$$

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

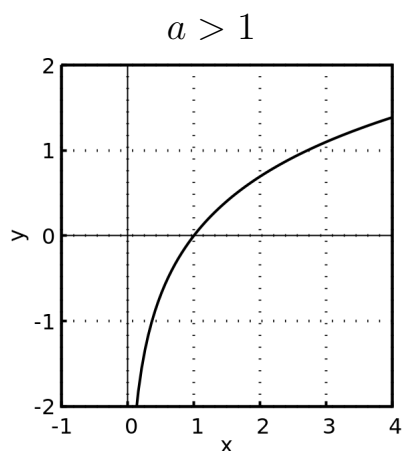
функция общего вида

график - логарифмическая кривая

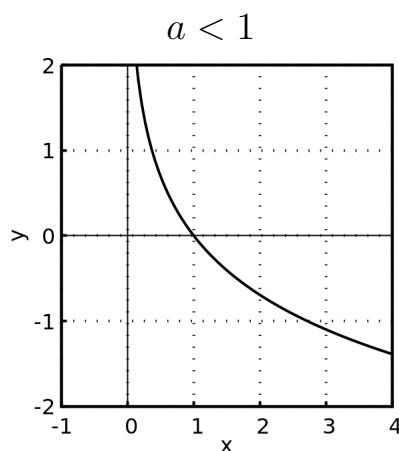
Частные случаи логарифмической функции:

$a = e : y = \log_e x = \ln x$ - функция натурального логарифма

$a = 10 : y = \log_{10} x = \lg x$ - функция десятичного логарифма



$$\begin{aligned} \log_a x &\rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty \\ \log_a x &\rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow 0 \\ \log_a x &= 0 \text{ при } x = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \log_a x &\rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty \\ \log_a x &\rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow 0 \\ \log_a x &= 0 \text{ при } x = 1 \end{aligned}$$

4. Тригонометрические функции

а) $y = \sin x$

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

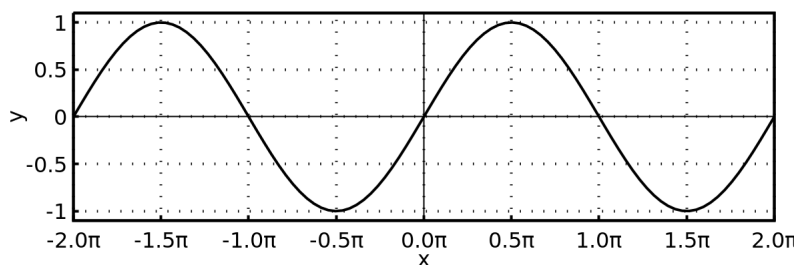
$$E(y) = [-1; 1]$$

функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin(x)$

функция периодическая с периодом $T = 2\pi$

основной промежуток - $[0; 2\pi]$

график - синусоида



$$б) y = \cos x$$

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

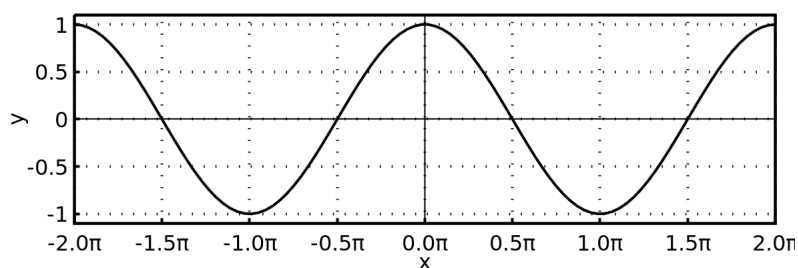
$$E(y) = [-1; 1]$$

функция четная: $\cos(-x) = \cos(x)$

функция периодическая с периодом $T = 2\pi$

основной промежуток - $[0; 2\pi]$

график - косинусоида



$$в) y = \operatorname{tg} x$$

$$D(y) : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

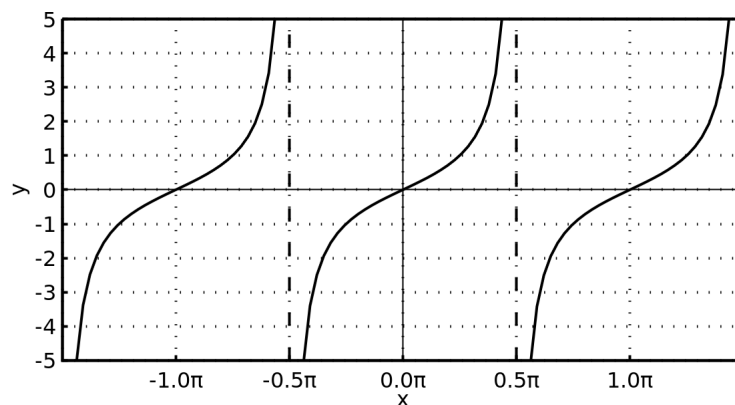
$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$

функция периодическая с периодом $T = \pi$

основной промежуток - $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

график - тангенсоида



$$\text{г) } y = \operatorname{ctg} x$$

$$D(y) : x \neq \pi k, k \in Z$$

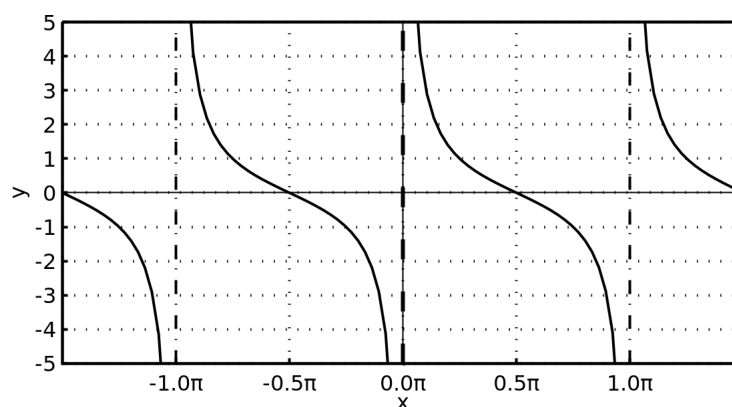
$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x)$

функция периодическая с периодом $T = \pi$

основной промежуток - $[0; \pi]$

график - котангенсоида



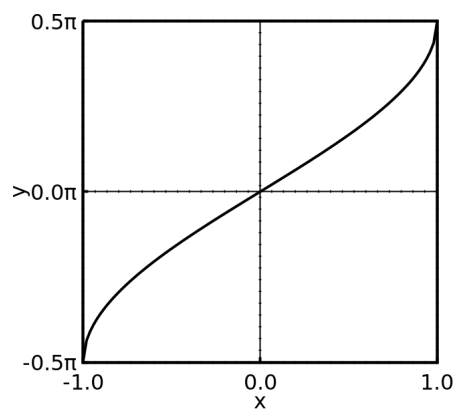
5. Обратные тригонометрические функции

$$\text{а) } y = \arcsin x$$

$$D(y) = [-1; 1]$$

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$



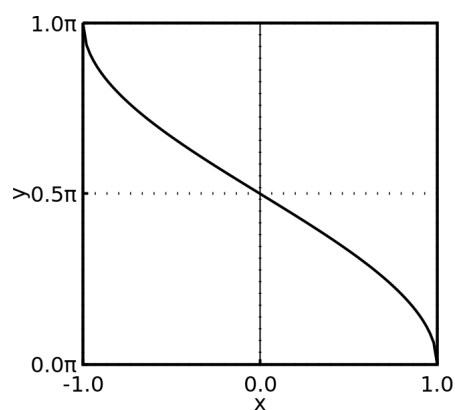
$$\text{б) } y = \arccos x$$

$$D(y) = [-1; 1]$$

$$E(y) = [0; \pi]$$

функция общего вида

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

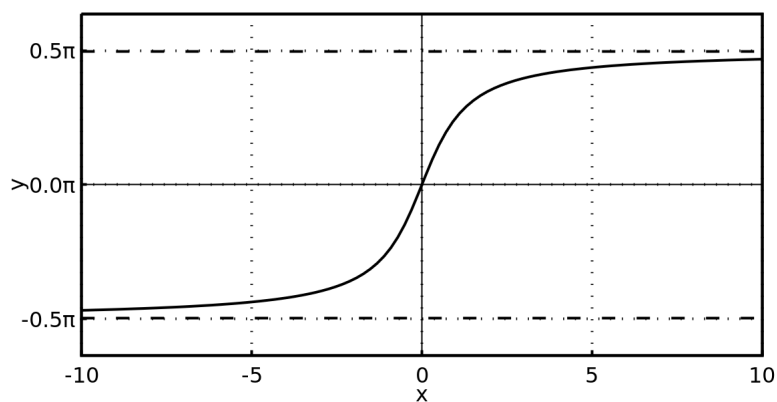


$$\text{в) } y = \operatorname{arctg} x$$

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$



$$\operatorname{arctg} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

$$\operatorname{arctg} x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ при } x \rightarrow -\infty$$

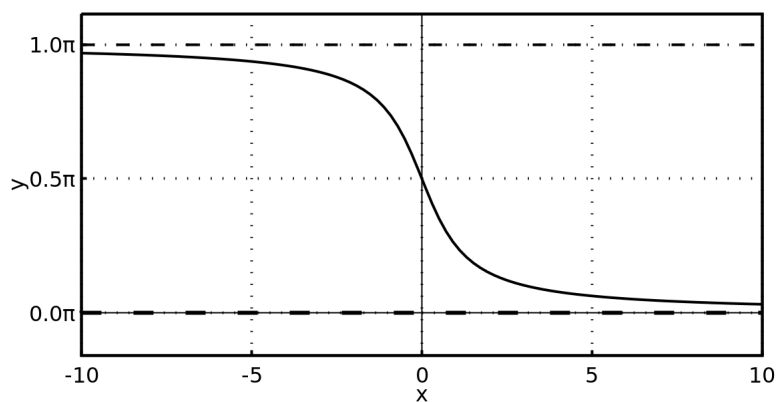
$$\text{г) } y = \operatorname{arctg} x$$

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = (0; \pi)$$

функция общего вида

$$\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$$



$$\operatorname{arctg} x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

$$\operatorname{arctg} x \rightarrow \pi \text{ при } x \rightarrow -\infty$$