Раздел 2. Дифференциальные уравнения

Модуль 4. Линейные дифференциальные уравнения и системы.

Лекция 4.3

Аннотация

Нормальные системы ДУ. Задача и теорема Коши. Частные и общее решения. Системы линейных ДУ первого порядка. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной систем ЛДУ.

§ 2. Системы дифференциальных уравнений

1.1. Основные понятия

Для решения многих задач математики, физики, техники, экономики нередко требуется определить сразу несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующих систему.

<u>*Определение 1.1.*</u> ***Системой ДУ*** называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные (или дифференциалы).

<u>*Определение 1.2.*</u> Система ДУ первого порядка, разрешенная относительно производной, называется ***нормальной***. Она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - неизвестные функции переменной x; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - известные непрерывные в некоторой области (интервал, отрезок, полуинтервал) функции, зависящие от x.

Геометрический смысл системы (1.1): решение системы (1.1) задает в (n+1)-мерном пространстве с координатами $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ кривую, которая называется ***интегральной кривой системы***; интегральная кривая в каждой точке касается вектора с координатами $(1, f_1, f_2,..., f_n)$.

В дальнейшем будем рассматривать нормальные системы ДУ.

Определение 1.3. Число уравнений, входящих в систему (1.1), называют ***порядком системы ДУ***.

Определение 1.4. ***Решить*** или ***проинтегрировать*** (на некотором отрезке $[a,b]$) ***систему ДУ*** (1.1) – значит найти совокупность n функций $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$, определенных и непрерывно дифференцируемых (в указанном отрезке), обращающих каждое уравнение системы в тождество.

Определение 1.5. ***Задача Коши для системы ДУ*** (1.1) состоит в нахождении среди всех решений системы (1.1) такого решения $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$, которое удовлетворяло бы начальным условиям (при $x = x_0$):

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0,\ldots, y_n(x_0) = y_n^0. \tag{1.2}$$

Геометрический смысл задачи Коши: найти среди всей совокупности интегральных кривых системы (1.1) те, которые проходят через точки с координатами $\left(x_0, y_1^0\right),\left(x_0, y_2^0\right),\ldots,\left(x_0, y_n^0\right)$.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальной системы). Если в системе (1.1) все функции $f_i(x, y_1, y_2,\ldots, y_n)$ ($i = \overline{1,n}$) определены и непрерывны вместе со своими частными производными по y_i в некоторой области D ((n+1)-мерного пространства), то в каждой точке $M_0\left(x_0, y_1^0, y_2^0,\ldots, y_n^0\right)$ этой области существует единственное решение $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x),\ldots, y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям (1.2).

Определение 1.6. ***Общим решением системы ДУ*** (1.1) называется совокупность n функций

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, C_1, C_2,\ldots, C_n); \\ y_2 = y_2(x, C_1, C_2,\ldots, C_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(x, C_1, C_2,\ldots, C_n), \end{cases}$$

зависящих от переменной x и произвольных постоянных $C_1, C_2,\ldots, C_n$ и удовлетворяющих условиям:

1) функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определены в области изменения переменной x и имеют непрерывные частные производные по x;
2) функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ должны являться решением системы (1.1) при любых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Определение 1.7. ***Частным решением системы ДУ*** (1.1) называют решение, полученное из общего при некоторых частных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

При решении систем ДУ часто пользуются следующим *утверждением*: систему (1.1) можно свести к одному ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

и наоборот, одно ДУ n-го порядка можно свести к системе ДУ (1.1).

Пример 1. Приведем ДУ $y'' + y - 3 = 0$ к нормальной системе. Для этого введем следующую замену: пусть $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$. В результате получим нормальную систему ДУ

$$\begin{cases} y' = z; \\ z' = 3 - y. \end{cases}$$

Пример 2. Приведем нормальную систему ДУ

$$\begin{cases} y' = 4y + z; \\ z' = 1 + y - z \end{cases}$$

к одному ДУ.

а) Из первого уравнения системы выразим $z = y' - 4y$, тогда $z' = y'' - 4y'$.

б) Подставим z и z' во второе уравнение системы. Получим $y'' - 4y' = 1 + y - y' + 4y$ или

$$y'' - 3y' - 5y = 1$$

ЛНДУ 2-го порядка.

1.1. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Решение различных прикладных задач приводит к так называемым линейным системам ДУ.

<u>*Определение 2.1.*</u> Система ДУ называется ***линейной***, если неизвестные функции и их производные (дифференциалы) входят в каждое уравнение только в первой степени.

Нормальная система линейных дифференциальных уравнений *1*-го порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

где функции $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ ($i, j = \overline{1,n}$) непрерывны в некоторой области *D*.

<u>*Определение 2.2.*</u> Если все функции $f_i(x) = 0$, то система (2.1) называется ***линейной однородной***, если хотя бы одна из них не равна нулю – ***линейной неоднородной***.

<u>*Определение 2.3.*</u> Если все функции $a_{ij}(x)$ являются постоянными, т.е. $a_{ij}(x) = a_{ij} = const$, то система (2.1) называется ***линейной с постоянными коэффициентами***.

Используя векторно-матричные *обозначения*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

систему (2.1) можно записать как

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x) + F(x). \tag{2.2}$$

Соответствующая однородная система

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x). \tag{2.3}$$

<u>*Определение 2.2.*</u> Вектор-функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ называются ***линейно независимыми на отрезке*** $[a,b]$, если в каждой точке этого отрезка равенство

$$\alpha_1 \cdot Y_1(x) + \alpha_2 \cdot Y_2(x) + \ldots + \alpha_n \cdot Y_n(x) = 0 \qquad (2.4)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ для всех чисел $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2.3. Любая система, состоящая из *n* линейно независимых вектор-функций $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$, называется ***ФСР системы*** (2.3).

Определение 2.4. Квадратная матрица $\Phi(x)$, столбцы которой образованы координатами линейно независимых решений $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$, называется ***фундаментальной матрицей системы решений***. Она имеет вид

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 2.5. Определитель фундаментальной матрицы $\Phi(x)$ называется ***определителем Вронского*** или ***вронскианом*** системы решений $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$.

Определитель Вронского удобно использовать для проверки линейной независимости решений.

Замечания:

1. Матрица $\Phi(x)$ является невырожденной.
2. Для определителя Вронского системы решений $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$ справедлива формула ***Остроградского-Лиувилля***

   $$W(x) = W[Y_1, Y_2, ..., Y_n] = e^{\int tr(A(x))dx},$$

   где $tr(A(x))$ - след матрицы $A(x)$, т.е. сумма всех диагональных элементов.

Теорема (о структуре общего решения однородной системы (2.3)*).* Общее решение однородной системы (2.3) выражается через фундаментальную матрицу в виде $\boxed{Y_{oo}(x) = \Phi(x) \cdot C}$, где *C* – *n*-мерный вектор, состоящий из произвольных чисел.

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы (2.2)*).* Пусть $Y_{oo}(x)$ - общее решение однородной системы (2.3), $Y_{чн}(x)$ - частное решение неоднородной системы (2.2), тогда общее решение системы (2.2) имеет вид

$$\boxed{Y(x) = Y_{oo}(x) + Y_{чн}(x)}.$$

Теорема (*принцип суперпозиции, наложения решений*). Если $Y_1^*(x)$ - решение системы $Y'(x) = A(x)\cdot Y(x) + F_1(x)$, а $Y_2^*(x)$ - решение системы $Y'(x) = A(x)\cdot Y(x) + F_2(x)$, то $Y_1^*(x) + Y_2^*(x)$ - решение системы $Y'(x) = A(x)\cdot Y(x) + F_1(x) + F_2(x)$.