Раздел 2. Дифференциальные уравнения

Модуль 4. Линейные дифференциальные уравнения и системы.

Лекция 4.1

Аннотация

Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) n-го порядка, однородные и неоднородные. Теорема о существовании и единственности решения. Дифференциальный оператор $L[y]$, его свойства. Структура общего решения неоднородного линейного ДУ (НЛДУ). Теорема о наложении частных решений. Теорема о наложении частных решений. Линейное пространство решений однородного ЛДУ (ОЛДУ). Линейно зависимые и независимые системы функций на отрезке. Определитель Вронского (вронскиан). Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций. Теорема о вронскиане системы линейно зависимых решений ОЛДУ. Теорема о структуре общего решения ОЛДУ. Размерность пространства решений ОЛДУ. Фундаментальная система решений ОЛДУ. Формула Остроградского-Лиувилля и ее следствия.

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

1.1. Основные понятия. Дифференциальный оператор, его свойства. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, его свойство

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям (ЛДУ).

<u>*Задача.*</u> Определить закон движения материальной точки массой m, на которую действует сила, направленная к началу координат и пропорциональная расстоянию точки от начала координат. Сопротивлением среды пренебречь.

Решение. Пусть $x(t)$ - положение точки в момент времени t на оси Ox, тогда $\dfrac{dx}{dt}$ - скорость точки в момент времени t; $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ - ее ускорение.

Согласно второму закону Ньютона, имеем ДУ движения $m\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}=-a\cdot x$ или $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{a}{m}\cdot x=0$ - ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение $x(t)=C_1\cos\sqrt{\dfrac{a}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\dfrac{a}{m}}t=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{a}{m}}t+\varphi\right)$ - гармонические колебания с амплитудой A, начальной фазой φ и периодом $\sqrt{\frac{a}{m}}(t+T)+\varphi=\sqrt{\frac{a}{m}}t+\varphi+2\pi$ или $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{a}}$. Здесь $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\sin\varphi=\frac{C_1}{A}$, $\cos\varphi=\frac{C_2}{A}$, C_1 и C_2 - константы.

<u>*Определение 1.1.*</u> Уравнение вида

$$b_0(x)\cdot y^{(n)}+b_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+b_n(x)\cdot y=g(x), \tag{2.1}$$

где $b_0(x)\neq 0$, $b_1(x)$, …, $b_n(x)$, $g(x)$- заданные непрерывные (на некотором множестве X (отрезок, интервал, полупрямая или вся числовая прямая) функции, называется ***ЛДУ n-го порядка.***

Уравнение (2.1) содержит искомую функцию y и все ее производные лишь в первой степени (отсюда и название уравнения – *линейное*).

Функции $b_0(x)$, $b_1(x)$, …, $b_n(x)$ называются ***коэффициентами*** уравнения (2.1), а функция $g(x)$ - его ***свободным членом***.

<u>*Определение 1.2.*</u> Если $g(x)\equiv 0$, то уравнение (2.1) называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка.*** Если $g(x)\neq 0$, то ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n-го порядка*** (или линейным уравнением с правой частью)**.**

Разделим обе части уравнения (2.1) на $b_0(x)\neq 0$ и запишем уравнение (2.1) в виде

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\cdot y=f(x) \tag{2.2}$$

- ***приведенное ЛДУ n-го порядка.***

К уравнению (2.2) могут быть добавлены начальные условия

$$y(x_0)=y_1^0,\ y'(x_0)=y_2^0,\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^0,\ x_0\in X\ . \tag{2.3}$$

Полученная задача (2.2)-(2.3) называется ***задачей Коши***.

<u>*Теорема 1*</u> *(о существовании и единственности решения задачи Коши).* Решение задачи Коши (2.2)-(2.3) существует и единственно на любом отрезке $[a,b]\in X$.

Введем следующие **обозначения**: $L[y(x)]\equiv y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\cdot y$ - ***линейный дифференциальный оператор n-го порядка.*** Тогда $L[y]=0$ - ЛОДУ *n*-го порядка, $L[y]=f(x)$ - ЛНДУ *n*-го порядка.

<u>*Лемма 1*</u> *(свойство линейного оператора).* Пусть $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$- произвольные функции, имеющие производные до *n*-го порядка

включительно, C_1 и C_2 - произвольные постоянные, тогда выполняется равенство

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1 \cdot L[y_1] + C_2 \cdot L[y_2]. \qquad (2.4)$$

Докажем две основные теоремы ЛДУ.

<u>*Теорема 2*</u> *(о структуре общего решения ЛНДУ).* Общее решение $y_{он} = y(x)$ неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ есть сумма какого-либо частного решения $y_{чн}(x)$ этого уравнения и общего решения $y_{оо}(x)$ соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$, т.е. $\boxed{y = y_{оо} + y_{чн}}$.

Доказательство:

1. Покажем сначала, что $y(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$. является решением ДУ $L[y] = f(x)$.

Из леммы 1 следует, что

$$L[y_{чн}(x) + y_{оо}(x)] = L[y_{чн}(x)] + L[y_{оо}(x)] = f(x) + 0 = f(x).$$

2. Теперь покажем, что любое решение $y(x)$ неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ есть $y(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$.

Имеем

$$L[y(x) - y_{чн}(x)] = L[y(x)] - L[y_{чн}(x)] = f(x) - f(x) = 0 = L[y_{оо}(x)].$$

Теорема доказана.

<u>*Теорема 3*</u> *(о наложении решений) (свойство ЛДУ).* Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ - соответствующие решения уравнений $L[y] = f_1(x)$ и $L[y] = f_2(x)$, тогда $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Доказательство: Из леммы 1 следует, что

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)] = f_1(x) + f_2(x).$$

Теорема доказана.

1.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения

1.2.1. Линейно зависимые и независимые системы функций на отрезке. Определитель Вронского

Рассмотрим ЛОДУ $L[y] = 0$. Из Леммы 1 следует Лемма 2.

Лемма 2. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,$ $y_n(x)$ - какие-либо частные решения ЛОДУ $L[y]=0$ и C_1, $C_2,\dots,$ C_n - произвольные постоянные. Тогда линейная комбинация $C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x)$ также является решением этого уравнения.

Из Леммы 2 следует, что множество решений ЛОДУ образует линейное пространство. Какова размерность этого пространства, и как устроен базис? То есть может ли функция $y(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x)$ являться общим решением уравнения $L[y]=0$?

Определение 1.3. Функции $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,$ $y_n(x)$ называются ***линейно независимыми*** на некотором отрезке $[a,b]$, если равенство

$$\alpha_1\cdot y_1(x)+\alpha_2\cdot y_2(x)+\ldots+\alpha_n\cdot y_n(x)=0 \qquad (2.5)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ для всех чисел $\alpha_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\ldots,n$.

Определение 1.4. Если хотя бы одно из чисел $\alpha_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\ldots,n,$ отлично от нуля и выполняется равенство (2.5), то функции $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,$ $y_n(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на $[a,b]$.

Замечание. Из определений 1.3 и 1.4 следует, что два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми (зависимыми) на отрезке $[a,b]$, если их отношение не является (является) постоянным на этом отрезке, т.е. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const\ \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=const\right)$, $x\in[a,b]$. Например, 1) функции $y_1(x)=3e^x$ и $y_2(x)=e^x$ - линейно зависимы, т.к. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=const\neq 0$; 2) функции $y_1(x)=3e^x$ и $y_3(x)=e^{2x}$ - линейно независимы, т.к. $\frac{y_1(x)}{y_3(x)}=3e^{-x}\neq const$; 3) функции $y_4(x)=\sin x$ и $y_5(x)=\cos x$ - линейно независимы, т.к. $\frac{y_4(x)}{y_5(x)}=\operatorname{tg}x\neq const$ и $\alpha_1\cdot\sin x+\alpha_2\cdot\cos x=0\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$.

Средством изучения линейной зависимости системы функций $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,$ $y_n(x)$ является так называемый ***определитель Вронского*** (или просто *вронскиан*) (Юзеф Мария Вронский – польский математик (1776-1853)).

Определитель Вронского имеет вид:

$$\boxed{W(x)=W[y_1,y_2,\ldots,y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}.$$

В частности, $W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1\cdot y_2'-y_1'\cdot y_2$.

<u>*Теорема 4.*</u> Если дифференцируемые функции $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,$ $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского на этом отрезке равен нулю, т.е. $W(x)=W[y_1,y_2,\ldots,y_n]=0$, $x\in[a,b]$.

<u>*Теорема 5.*</u> Если $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,$ $y_n(x)$ - линейно независимые решения уравнения $L[y]=0$ на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского ни при одном значении $x\in[a,b]$ не обращается в нуль.

<u>*Пример.*</u> Функции x, $\sin x$, $\cos x$ являются линейно независимыми, т.к. $W[x,\sin x,\cos x]=\begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix}=-x\neq 0.$

Из теорем 4 и 5 вытекает

<u>*Следствие.*</u> Определитель Вронского некоторой системы решений ЛОДУ $L[y]=0$ либо тождественно равен нулю на отрезке $[a,b]$, и тогда эти решения являются линейно независимыми, либо не обращается в нуль ни в одной точке $x\in[a,b]$; в этом случае рассматриваемые решения линейно независимы.

1.2.2. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля

<u>*Определение 1.5.*</u> Совокупность любых *n* линейно независимых на отрезке $[a,b]$ частных решений $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,$ $y_n(x)$ ЛОДУ $L[y]=0$ будем называть ***фундаментальной системой (набором) решений (ФСР)***.

Определитель Вронского, составленный из ФСР отличен от нуля.

<u>*Теорема 6*</u> *(о существовании ФСР)*. Всякое ЛОДУ с непрерывными коэффициентами имеет ФСР.

<u>*Замечание.*</u> ФСР ЛОДУ определена неединственным образом.

Теорема 7 *(о структуре общего решения ЛОДУ).* Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ - фундаментальный набор решений ЛОДУ $L[y]=0$. Тогда *общее решение ЛОДУ* задается формулой: $\boxed{y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n}$.

Пример. $y_1(x)=e^{2x}$ и $y_2(x)=e^{-2x}$ - частные решения ЛОДУ второго порядка $y''-4y'=0$. Эти решения линейно независимы, т.к. их определитель Вронского

$$W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{2x}e^{-2x} - 2e^{2x}e^{-2x} = -4 \neq 0.$$

$y_1(x)=e^{2x}$ и $y_2(x)=e^{-2x}$ образуют ФСР, следовательно $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ - общее решение уравнения $y''-4y'=0$.

Замечание. Множество решений ЛОДУ образует *n*-мерное линейное пространство, а ФСР является его базисом.

Для определителя Вронского можно доказать формулу

$$\boxed{W[y_1,y_2,\ldots,y_n] = W_0 \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}},$$

где W_0 - значение вронскиана при $x=x_0$ $(W_0=W(x_0))$, y_1, y_2,…, y_n образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ $L[y]=0$, $a_1(x)$ - коэффициент перед производной $y^{(n-1)}$. Эта формула называется ***формулой Остроградского-Лиувилля***. Из этой формулы следуют две теоремы 7 и 8 (следствия формулы Остроградского-Лиувилля).

Теорема 8 *(о свойстве определителя Вронского для системы решений ЛОДУ).* Если определитель Вронского для системы решений ЛОДУ равен нулю в какой-либо точке $x_0 \in [a,b]$, то он тождественно равен нулю на всем отрезке $[a,b]$.

Теорема 9. Если известно одно частное решение $y_1(x)$ ЛОДУ второго порядка $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, то второе его частное решение $y_2(x)$, линейно независимое с первым, можно найти по формуле

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx}.$$

Примеры.

1. Функция $y_1(x)=e^x$ является частным решением ЛОДУ второго порядка $y''-2y'+y=0$, тогда второе решение $y_2(x)=e^x \cdot \int \frac{e^{\int 2dx}}{e^{2x}}dx = e^x \cdot \int dx = xe^x$.

Общее решение - $y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)$.

2. Пусть известно, что частное решение ЛОДУ второго порядка $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$ есть $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Тогда

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{-2\ln|x|}}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{x} \cdot (-\operatorname{ctg} x) = -\frac{\cos x}{x}.$$

Общее решение - $y = C_1 \dfrac{\sin x}{x} + C_2 \left(-\dfrac{\cos x}{x}\right) = \dfrac{1}{x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$.

3. Составим дифференциальное уравнение, фундаментальный набор решений которого образован функциями $1, x^2, e^x$. Для этого запишем искомое уравнение через определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & e^x & y \\ 0 & 2x & e^x & y' \\ 0 & x & e^x & y'' \\ 0 & 1 & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим $(x-1)y''' - xy'' + y' = 0$.