Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МОДУЛЬ 1: ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Индивидуальное домашнее задание

Общие методические указания:

- Домашнее задание выполняется по вариантам, номер которого соответствует номеру в списке журнала посещаемости занятий.

- Работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней стороне обложки которой должны быть указаны: фамилия и инициалы студента, выполнившего домашнее задание, шифр группы и наименование дисциплины и название домашнего задания.

- Решения задачи начинается с приведения полного текста задания.

- Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Необходимо привести все вычисления, проделанные по ходу выполнения заданий, ответ.

- Работа над ошибками выполняется в конце работы. Исправления в тексте после проверки работы преподавателем не допускаются.

Критерии оценки: Домашнее задание считается сданным, если правильно решены все задачи. Число баллов, проставляемое за домашнее задание, зависит от количества ошибок, допущенных студентом в ходе выполнения работы, и числа попыток сдачи работы преподавателю до устранения всех ошибок. Итоговое число баллов домашних заданий выбирается из диапазона 11-15.

Составитель: кандидат ф.-м.н.,
доцент кафедры «Высшей математики»
МГТУ им. Н.Э. Баумана
И.В. Меньшова

Задача 1.1. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ линейного пространства V_3. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис пространства V_3. Найти разложение вектора $\vec{d}$ по этому базису. Сделать проверку. (2 балла)

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(1,2,3)	(-2,0,1)	(-3,2,0)	(-2,0,6)
2	(3,-2,4)	(0,-3,5)	(7,1,0)	(1,-1,2)
3	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-3,2,0)	(7,0,6)
4	(4,-5,7)	(1,0,-2)	(2,-1,0)	(-5,1,1)
5	(-3,1,0)	(4,3,-1)	(1,1,0)	(-9,4,1)
6	(2,1,-1)	(1,0,-2)	(-1,2,3)	(9,-7,-19)
7	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-1,0,3)	(2,1,4)
8	(-3,1,0)	(4,3,-1)	(1,1,0)	(-5,4,1)
9	(2,1,-1)	(1,0,-2)	(-1,2,3)	(0,3,-1)
10	(6,0,-2)	(1,1,-1)	(0,-3,4)	(5,-7,11)

Задача 1.2. Является ли множество $L=\left\{\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\right)\right\}$ векторов заданного вида линейным подпространством в R^3? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства R^3. Выписать матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3 к построенному базису. (2 балла)

№ варианта	$L=\left\{\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\right)\right\}$
1	а) $\left(a+b;-a+2b;a-3b\right)$, б) $\left(a+b;-a+2b;a-3\right)$
2	а) $\left(3a+b;3+2b;a-2b\right)$, б) $\left(3a+b;3a+2b;a-2b\right)$
3	а) $\left(2a-2;-3a+2b;2a+b\right)$, б) $\left(2a-2b;-3a+2b;2a+b\right)$
4	а) $\left(2a+b;a;-a+3b\right)$, б) $\left(2a+b;a;-1+3b\right)$
5	а) $\left(-3-2b;-a+2b;-a+3b\right)$, б) $\left(-3a-2b;-a+2b;-a+3b\right)$
6	а) $\left(a+b;-7b;-2a+3b\right)$, б) $\left(a+b;-7b;-2a+3\right)$
7	а) $\left(3a+2b;-a-b;2a+4b\right)$, б) $\left(3a+2b;-a-b;2a+4\right)$
8	а) $\left(-a-1;-3a+b;2a-b\right)$, б) $\left(-a-b;-3a+b;2a-b\right)$
9	а) $\left(2a;3b-1;-b\right)$, б) $\left(2a;3b-a;-b\right)$
10	а) $\left(-2a-b;2a;a-3b\right)$, б) $\left(-2a-b;2a+1;a-3b\right)$

Задача 1.3. Проверить, что множество многочленов $L = \{p(t)\}$ заданного вида с вещественными коэффициентами образует линейное подпространство в линейном пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис L, дополнить его до базиса всего пространства P_2. Найти координаты многочлена $h(t) \in L$ в базисе подпространства L. (2 балла)

№ варианта	$p(t),\ a,b \in R$	$h(t)$
1	$p(t) = (-a+3b)t^2 + (2a+b)t + 7a$	$h(t) = -3t^2 + 20t + 63$
2	$p(t) = -at^2 + (2a+b)t - 4a$	$h(t) = -t^2 - 4$
3	$p(t) = (2a+4b)t^2 + (-a-2b)t - 4a$	$h(t) = 10t^2 - 5t - 3$
4	$p(t) = (2a-b)t^2 + bt + a - 3b$	$h(t) = t^2 + t - 2$
5	$p(t) = at^2 + (a-2b)t + 4a + 4b$	$h(t) = -2t^2 - 4t - 4$
6	$p(t) = 3at^2 + (2a+b)t + 3a + b$	$h(t) = -3t^2 + t$
7	$p(t) = (a-2b)t^2 + (-a+3b)t + 2a$	$h(t) = -5t^2 + 6t - 6$
8	$p(t) = (a-2b)t^2 + 3at + 4a + 4b$	$h(t) = t^2 - 3t - 8$
9	$p(t) = (-a+b)t^2 + (3a-3b)t + 2b$	$h(t) = -t^2 + 3t + 2$
10	$p(t) = 2at^2 + (a+4b)t - a + 4b$	$h(t) = -6t^2 + 5t + 11$

Задача 1.4. Доказать, что множество M матриц заданного вида является линейным подпространством в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка M_{2x2}. Построить базис и найти размерность подпространства M. (2 балла)

№ варианта	$M,\ a,b \in R$
1	$\begin{pmatrix} 4a-2b & 0 \\ -3a+3b & 2a \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -4a+3b & -a+3b \\ 0 & 2a-2b \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2a+3b & -4a+2b \\ a-4b & 2a \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -3a+2c & -3a-b \\ c & 2b-3c \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} a+2b & b+3c \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$

6	$\begin{pmatrix} a-3b & a+b \\ b & -3a-2b \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5b-c & -a \\ 2a+b+c & 3c \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -a-c & 2b+c \\ 2b-3c & b+2c \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -a+3b & -2a+3b \\ -3a-3b & -a+b \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -a-b & 2a-b \\ -3a-2b & -2a-3b \end{pmatrix}$

Задача 1.5. Методом ортогонализации построить ортонормированный базис евклидова пространства по его базису $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$. (3 балла)

№ варианта	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$
1	$(1,1,2)$	$(2,-1,0)$	$(-1,1,1)$
2	$(1,1,3)$	$(-3/2,-1,0)$	$(-1,1,1)$
3	$(1,1,4)$	$(4/3,-1,0)$	$(-1,1,1)$
4	$(1,1,3/2)$	$(3,-1,0)$	$(-1,1,1)$
5	$(1,1,4/3)$	$(4,-1,0)$	$(-1,1,1)$
6	$(1,1,5)$	$(5/4,-1,0)$	$(-1,1,1)$
7	$(1,1,5/4)$	$(5,-1,0)$	$(-1,1,1)$
8	$(1,1,6)$	$(6/5,-1,0)$	$(-1,1,1)$
9	$(1,1,6/5)$	$(6,-1,0)$	$(-1,1,1)$
10	$(1,1,7)$	$(7/6,-1,0)$	$(-1,1,1)$

Задача 1.6. Оператор A действует в пространстве R^3, $\vec{x}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)\in R^3$. Проверить, является ли оператор A линейным. В случае линейности записать матрицу оператора A в каноническом базисе пространства R^3. (2 балла)

№ варианта	A
1	a) $\mathrm{A}\vec{x}=(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2, x_1+2x_3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x}=(x_1+x_2+3, x_1+4x_2+x_3, -4x_1-x_3)$
2	a) $\mathrm{A}\vec{x}=(-6x_2+x_3, x_1+x_2-1, 6x_2+x_3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x}=(x_1, x_1+x_2+x_3, x_1-x_2-x_3)$
3	a) $\mathrm{A}\vec{x}=(x_1^2+2x_2+x_3, x_1, x_1+2x_2+3x_3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x}=(x_1-2x_2+x_3, x_1+2x_2+3x_3, x_1+3x_3)$
4	a) $\mathrm{A}\vec{x}=(2x_1+3x_2+x_3, x_1+4x_2+x_3, 4x_1)$;

	b) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2, x_2 - x_3, x_1 + 2)$
5	a) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_2 + 3x_3, -x_1 + x_3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x} = (4x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, 7x_1 + 7)$
6	a) $\mathrm{A}\vec{x} = (2x_2 + x_3, x_1 - 3, x_1 + 2x_2 - 4x_3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2, x_1 - 3x_2 + x_3, 3x_1 + x_2 - 2x_3)$
7	a) $\mathrm{A}\vec{x} = (5x_1 + x_2 + x_3, x_1, x_3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + x_2 - 3x_3, 7, x_1 + 2x_2)$
8	a) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_3, x_2 + x_3, x_3^3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x} = (-x_1 + x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$
9	a) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + 6x_2 + 3x_3, x_1 - x_2, x_1 + 7x_2 + 0.5x_3)$; b) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 5x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, 9)$
10	a) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + 4x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3, x_1)$; b) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 + x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3, 1)$

Задача 1.7. Линейный оператор A в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задан матрицей A. Найти матрицу оператора A в базисе $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$. (2 балла)

№ варианта	A	$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$
1	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_3' = -2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
4	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$
5	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{e}_3' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
8	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$ $\vec{e}_3' = \vec{e}_2$
9	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{e}_2' = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$ $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$
10	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_1' = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$ $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_3,$ $\vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$