Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МОДУЛЬ 1: ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Вопросы по теории рубежного контроля

1. Дайте определение линейного пространства и сформулируйте его аксиомы. Приведите примеры линейных пространств. Убедитесь, что множество матриц размера $m \times n$ образует линейное пространство.
2. Дайте определение линейно зависимой системы векторов. Сформулируйте критерий линейной зависимости и следствия из него.
3. Дайте определение базиса линейного пространства. Сформулируйте теорему о разложении элемента линейного пространства по базису. В линейном пространстве задан базис: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ своими координатами в некотором базисе. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
4. Дайте определение размерности линейного пространства. Чему равна размерность линейного пространства, состоящего из решений системы линейных однородных уравнений? Как связаны между собой понятия:
   а) базис линейного пространства решений и фундаментальная система решений;
   б) размерность линейного пространства решений и ранг матрицы системы?
5. Дайте определение матрицы перехода от одного базиса линейного пространства к другому и сформулируйте ее свойства. Является ли матрица $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ матрицей перехода от одного базиса трехмерного линейного пространства к другому его базису? Напишите формулу преобразования координат вектора при переходе к новому базису.
6. Дайте определение подпространства линейного пространства и сформулируйте его свойства.
7. Приведите примеры подпространств.
8. Дайте определение линейной оболочки и приведите ее свойства.
9. Дайте определения: евклидова пространства, скалярного произведения, ортогональных векторов. Приведите примеры. Выясните, является ли линейное пространство всех квадратных матриц второго порядка евклидовым относительно операции $(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.
10. Приведите неравенство Коши–Буняковского и запишите следствия из него: неравенство Коши, неравенство Шварца.

11. Дайте определение нормы вектора и нормированного пространства. Приведите примеры.
12. Запишите формулу определения косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве.
13. Дайте определения ортогональной, ортонормированной систем векторов.
14. Сформулируйте свойство ортогональной системы, связанное с линейной зависимостью, и следствие из него. Убедитесь, что в R^4 система $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ - система ортогональных векторов. Является ли эта система векторов линейно независимой?
15. Дайте определение ортонормированного базиса, приведите примеры. Запишите для вычисления в таком базисе: а) формулу скалярного произведения; б) формулу евклидовой нормы; в) выражение координат вектора через скалярное произведение.
16. Подробно опишите построение ортонормированного базиса из произвольного базиса с помощью процесса ортогонализации Грама – Шмидта.
17. Дайте определение линейного оператора. Приведите примеры линейных и нелинейных операторов.
18. Дайте определение матрицы линейного оператора в данном базисе и опишите с её помощью действие линейного оператора на произвольный вектор.
19. Дайте определения: суммы и произведения линейных операторов, произведение линейного оператора на число. Приведите их свойства.
20. Выведите формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
21. Дайте определение подобных матриц и сформулируйте свойство их определителей.
22. Дайте определения: собственного вектора и собственного значения линейного оператора, характеристического уравнения.
23. Сформулируйте свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора. правила (теоремы) нахождения: (а) собственных чисел; (б) собственных векторов.
24. Запишите вид характеристического уравнения линейного оператора и докажите его независимость от базиса (свойство инвариантности).
25. Сформулируйте правила нахождения: (а) собственных чисел; (б) собственных векторов.
26. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие, при котором матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.
27. Сформулируйте достаточное условие существования базиса из собственных векторов.

Критерии оценки: В билет по теории РК входит 3 вопроса из предложенных выше, каждый из которых оценивается по шкале от 0 до 4 баллов. Максимально возможное количество баллов для каждого задания указаны в скобках. Рубежный контроль считается сданным, если сумма баллов за все вопросы не меньше 3.

Составитель ________________________ И.В. Меньшова

(подпись)