Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Текст 4.3

Аннотация

Задача на условный экстремум. Необходимое и достаточное условия условного экстремума. Пошаговый алгоритм поиска условного экстремума функции двух переменных с одним ограничением. Наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом ограниченном множестве.

1 Условный экстремум

Задача на условный экстремум

Найти все локальные максимумы и минимумы функции $f(x)$, где $x = (x_1, ..., x_n)$, при условии, что переменная x удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \varphi_2(x) = 0, \\ ... \\ \varphi_k(x) = 0. \end{cases}$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **целевой функцией**.

Определение

Уравнения, накладывающие ограничения на множество возможных значений переменной x, $\varphi_i(x) = 0$ называются **уравнениями связи**.

Определение

Экстремум функции $f(x)$ при условии выполнения уравнений связи называется **условным экстремумом**.

Определение

Функция $L(x) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + ... + \lambda_k\varphi_k(x)$ называется **функцией Лагранжа**, а числа λ_1, ..., λ_k - **множителями Лагранжа**.

Теорема (необходимое условие условного экстремума)

Если a является точкой условного экстремума функции $f(x)$ с уравнениями связи $\varphi_i(x) = 0, i = \overline{1,k}$, то

$$\frac{\partial L(a)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n},$$

$$\varphi_i(a) = 0, i = \overline{1,k}.$$

Необходимое условие позволяет найти стационарные точки функции Лагранжа $L(x)$ и соответствующие им множители Лагранжа $\lambda_i^{(0)}$.

Теорема (достаточное условие условного экстремума)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi_i(x), i = \overline{1,k}$ определены и имеют непрерывные частные производные 2-ого порядка в некоторой окрестности точки a, которая является стационарной точкой функции Лагранжа $L(x)$ с соответствующими множителями Лагранжа $\lambda_i^{(0)}$. Если

$$d^2L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0 \quad (\text{или} < 0)$$

при всех значениях $dx_1, ..., dx_n$, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} dx_i = 0, \\ \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} dx_i = 0, \\ \dots \\ \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i = 0, \end{cases}$$

то a является точкой условного минимума (или максимума) функции $f(x)$. Если d^2L знакопеременный, то в точке a условного экстремума нет.

Алгоритм поиска условного экстремума функции 2-х переменных $u = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$:

1. Задаем функцию Лагранжа $L(x, y)$.

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

2. Используя необходимое условие, находим стационарные точки функции Лагранжа и соответствующие им множители Лагранжа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1, y_1, \lambda_1 \\ x_2, y_2, \lambda_2 \\ \dots \end{matrix}$$

3. Для каждого набора x_i, y_i, λ_i находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 \tag{1}$$

и составляем уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0. \qquad (2)$$

4. Из уравнения (2) выражаем dx или dy и подставляем в (1). Получаем $d^2L(dx)$ или $d^2L(dy)$.

5. Используя достаточное условие, находим точки условного экстремума:

а. Если $d^2L(dx) > 0\ \forall dx \neq 0$ ($d^2L(dy) > 0\ \forall dy \neq 0$), то (x_i, y_i) - точка условного минимума.

б. Если $d^2L(dx) < 0\ \forall dx \neq 0$ ($d^2L(dy) < 0\ \forall dy \neq 0$), то (x_i, y_i) - точка условного максимума.

в. Если не выполняются условия (а) и (б), то условного экстремума нет.

2 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом ограниченом множестве

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве E с границей ∂E.

Алгоритм поиска:

1. Находим точки безусловного (обычного) экстремума и выбираем из них те, которые принадлежат множеству E.

2. Находим точки условного экстремума на границе множества ∂E.

3. Из найденных в пунктах 1 и 2 точек выбираем те, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

