Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Текст 4.2

Аннотация

Неявные функции, системы неявных функций и их производные. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению и градиент.

1 Неявные функции

Определение

Функция $y = y(x)$, где $x = (x_1, ..., x_n)$, называется **неявной функцией, заданной уравнением** $F(x, y) = 0$, если выполняется равенство $F(x, y(x)) = 0$.

Пример:

Функция $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ может быть неявно задана уравнением $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = 1$.

Теорема (о существовании и дифференцируемости неявной функции)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой точке непрерывные частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$,

2) $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$,

3) $\dfrac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} \neq 0$.

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой уравнение $F(x,y) = 0$ определяет единственную непрерывную функцию $y = y(x)$ такую, что $y(x^{(0)}) = y^{(0)}$,

2) частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и в этой точке вычисляются по формуле

$$\frac{\partial y(x^{(0)})}{\partial x_i} = -\frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y}, i = \overline{1,n}.$$

Определение

Функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_m = y_m(x)$, где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, называются **неявными функциями, заданными системой уравнений**

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, ..., y_m) = 0, \\ F_2(x, y_1, ..., y_m) = 0, \\ ... \\ F_m(x, y_1, ..., y_m) = 0, \end{cases}$$

если выполняются равенства

$$\begin{cases} F_1(x, y_1(x), ..., y_m(x)) = 0, \\ F_2(x, y_1(x), ..., y_m(x)) = 0, \\ ... \\ F_m(x, y_1(x), ..., y_m(x)) = 0. \end{cases}$$

Теорема (о существовании и дифференцируемости системы неявных функций)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $F_i(x, y_1, ..., y_m), i = \overline{1, m}$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, ..., y_m^{(0)})$ вместе со своими частными производными,

2) $F_i(x^{(0)}, y_1^{(0)}, ..., y_m^{(0)}) = 0, i = \overline{1, m}$,

3) якобиан

$$\frac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(y_1, ..., y_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & ... & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & ... & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & ... & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

не равен нулю в точке $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, ..., y_m^{(0)})$.

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, ..., y_m^{(0)})$, в которой система уравнений $F_i(x, y_1, ..., y_m) = 0, i = \overline{1, m}$ определяет единственную систему функций $y_i = y_i(x), i = \overline{1, m}$ таких, что $y_i^{(0)} = y_i(x^{(0)}), i = \overline{1, m}$,

2) функции $y_i = y_i(x), i = \overline{1, m}$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)}$,

3) частные производные $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$ в точке $x^{(0)}$ могут быть найдены из системы

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}.$$

2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть в 3-хмерном пространстве R^3 задана поверхность S с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$.

Определение

Прямая l, проходящая через заданную точку M поверхности S, называется **касательной прямой** к поверхности S в точке M, если l является касательной к какой-нибудь кривой, целиком лежащей на поверхности S.

Определение

Плоскость, в которой лежат все касательные прямые к поверхности S в точке M, называется **касательной плоскостью** к поверхности S в точке M.

Определение

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку M, называется **нормалью** к поверхности S в точке M.

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0.$$

Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)}.$$

Здесь x_0, y_0, z_0 - координаты точки M.

3 Производная по направлению и градиент

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой ε-окрестности $U(x_0, y_0, z_0; \varepsilon)$ точки (x_0, y_0, z_0). Через точку (x_0, y_0, z_0) проведем прямую P в направлении вектора $\overline{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы данного вектора.

Параметрические уравнения прямой P имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma. \end{cases}$$

Подставив эти уравнения в функцию $f(x, y, z)$, получим новую функцию $F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$, которая определена в точках прямой P.

Определение

Производная $\dfrac{dF}{dt}$ в точке $t = 0$ называется **производной** функции $f(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) **в направлении вектора** $\overline{e}$.

Обозначение:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \overline{e}}.$$

Формула для вычисления:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Определение

Градиентом функции $f(x)$ называется вектор с координатами

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Обозначение: ∇f, $\mathrm{grad} f$.

Таким образом,

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Свойства производной по направлению и градиента

1. $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{e}} = (\mathrm{grad} f, \overline{e}) = |\mathrm{grad} f| \cdot \cos(\overline{e}, \mathrm{grad} f)$.

2. $\mathrm{grad} f$ показывает направление наибольшего возрастания функции f.

3. Если $\overline{e} \uparrow\uparrow \mathrm{grad} f$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{e}} = |\mathrm{grad} f|$.

4. Если $\overline{e} \perp \mathrm{grad} f$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{e}} = 0$.