Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Текст 3.1

Аннотация

Производные основных элементарных функций. Правила нахождения производных. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Правила вычисления дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический смысл первой и второй производных.

1 Вычисление производных

Производные основных элементарных функций:

1. $c' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos(x+\Delta x/2)\sin\Delta x/2$$
$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin\Delta x/2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2} = \cos x.\blacksquare$$

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\Delta x\ln a}{\Delta x} = a^x\ln a.\blacksquare$$

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над функциями:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(cu)' = c\cdot u'$
5. $c' = 0$

Вывод формулы 2:

$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$
$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x), v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$
$y = uv$
$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$
$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) =$
$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$
$y' = (uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v) =$
$= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$
■

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$

Производная сложной функции

Если $y = u(v(x))$ - сложная функция, существуют $v'(x_0)$ и $u'(v_0)$, где $v_0 = v(x_0)$, то $y'(x_0) = u'(v_0) \cdot v'(x_0)$.

2 Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\circ(\Delta x), \Delta x\to 0$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\circ(\Delta x), \Delta x\to 0$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

Пример:
$f(x)=\ln x, x=1.1\Rightarrow x_0=1, \Delta x=0.1$
$f'(x)=1/x, f'(x_0)=1\Rightarrow \ln 1.1\approx \ln 1+1\cdot 0.1=0+0.1=0.1$
Точное значение: $\ln 1.1=0.09531$

3 Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v)=du+dv$
2. $d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}, v\neq 0$

4 Производные высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x)=(f'(x))'$

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$

На практике используют два способа обозначения производных высших порядков:
$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), ...$
$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), ...$

Пример:
$(2^x)' = 2^x \ln 2,$
$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$
$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$
...
$(2^x)^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$

5 Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2 f(x_0) = d(df(x_0)) = f''(x_0)dx^2$

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f(x_0)) = f^{(n)}(x_0)dx^n$

6 Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t. Тогда средняя скорость движения тела на интервале $[t, t+\Delta t]$ будет

$$V_{sr} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Соответственно, мгновенная скорость движения будет равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

7 Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.
$V = S'(t)$ - скорость
$a = V'(t) = S''(t)$ - ускорение