Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Производная сложной функции

Производная сложной функции

Теорема №1

Производная сложной функции

Теорема №1

Пусть функции одного переменного $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $a_x = x(t_0)$, $a_y = y(t_0)$.

Производная сложной функции

Теорема №1

Пусть функции одного переменного $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $a_x = x(t_0)$, $a_y = y(t_0)$. Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y),

Производная сложной функции

Теорема №1

Пусть функции одного переменного $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $a_x = x(t_0)$, $a_y = y(t_0)$. Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y), то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет в этой точке производную

Производная сложной функции

Теорема №1

Пусть функции одного переменного $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $a_x = x(t_0)$, $a_y = y(t_0)$. Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y), то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет в этой точке производную

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Теорема №2

Производная сложной функции

Теорема №2

Пусть функции двух переменных $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрерывны в точке (u_0, v_0) и имеют в ней частные производные

Теорема №2

Пусть функции двух переменных $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрерывны в точке (u_0, v_0) и имеют в ней частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v},$$

Теорема №2

Пусть функции двух переменных $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрерывны в точке (u_0, v_0) и имеют в ней частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v},$$

а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y), где $a_x = x(u_0, v_0)$, $a_y = y(u_0, v_0)$

Производная сложной функции

Тогда в точке (u_0, v_0) существуют частные производные сложной функции
$z = f(x(u,v), y(u,v))$,

Тогда в точке (u_0, v_0) существуют частные производные сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Производная сложной функции

Теорема №3

Производная сложной функции

Теорема №3

Пусть функции k переменных

$$x_i = x_i(t),$$

Производная сложной функции

Теорема №3

Пусть функции k переменных

$$x_i = x_i(t), t = (t_1, t_2, \ldots, t_k),$$

Теорема №3

Пусть функции k переменных

$$x_i = x_i(t), t = (t_1, t_2, ..., t_k), i = 1, 2, ..., n$$

Производная сложной функции

Теорема №3

Пусть функции k переменных

$$x_i = x_i(t), t = (t_1, t_2, ..., t_k), i = 1, 2, ..., n$$

непрерывны в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, ..., t_k^{(0)})$

Производная сложной функции

Теорема №3

Пусть функции k переменных

$$x_i = x_i(t), t = (t_1, t_2, ..., t_k), i = 1, 2, ..., n$$

непрерывны в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, ..., t_k^{(0)})$ и имеют в ней частные производные

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j},$$

Производная сложной функции

а функция $y = y(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$,

Производная сложной функции

а функция $y = y(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, ..., n$.

Производная сложной функции

а функция $y = y(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда в точке $t^{(0)}$ сложная функция $y = y(x(t))$ имеет частные производные

Производная сложной функции

а функция $y = y(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда в точке $t^{(0)}$ сложная функция $y = y(x(t))$ имеет частные производные

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}.$$

Производная сложной функции

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике сложные функции и их производные.

Производная сложной функции

1) $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Производная сложной функции

1) $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Производная сложной функции

2) $z = f(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Производная сложной функции

2) $z = f(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Производная сложной функции

Здесь $\dfrac{dz}{dt}$ - полная производная функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t,

Производная сложной функции

Здесь $\dfrac{dz}{dt}$ - полная производная функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t,а $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ - частная производная функции z по переменной t в предположении, что x и y - это независимые переменные.

Производная сложной функции

3) $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Производная сложной функции

3) $z = f(x, y),\ x = x(u, v),\ y = y(u, v)$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Рассмотрим сложную функцию $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Здесь u, v - независимые переменные, x, y - промежуточные переменные.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$dz =$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Свойство инвариантности означает, что форма дифференциала не зависит от того, для каких переменных (промежуточных или независимых) он выписан.

Приближенные вычисления

Пусть необходимо вычислить значение функции f в точке (x, y), при этом известно значение функции f в точке (a_x, a_y).

Для дифференцируемой функции имеем:

Для дифференцируемой функции имеем:

$$f(x,y) - f(a_x, a_y) =$$

Для дифференцируемой функции имеем:

$$f(x, y) - f(a_x, a_y) = df(a_x, a_y) + \circ(\rho),$$

Для дифференцируемой функции имеем:

$$f(x,y) - f(a_x,a_y) = df(a_x,a_y) + \circ(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2}$.

Для дифференцируемой функции имеем:

$$f(x,y) - f(a_x, a_y) = df(a_x, a_y) + \circ(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2}$.
Отбросив $\circ(\rho)$, получаем

Для дифференцируемой функции имеем:

$$f(x, y) - f(a_x, a_y) = df(a_x, a_y) + \circ(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}$.
Отбросив $\circ(\rho)$, получаем

$$f(x, y) - f(a_x, a_y) \approx df(a_x, a_y)$$

Тогда

Тогда

$$f(x, y) \approx f(a_x, a_y) + df(a_x, a_y) =$$

Тогда

$$f(x, y) \approx f(a_x, a_y) + df(a_x, a_y) =$$

$$= f(a_x, a_y) + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial x}(x - a_x) + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial y}(y - a_y).$$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Вторым дифференциалом функции $f(x)$ называется квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Определение

Вторым дифференциалом функции $f(x)$ называется квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Обозначение: $d^2 f$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$.

Обозначение: $d^n f =$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$.

Обозначение: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал первого порядка:

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал третьего порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал третьего порядка:

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy +$$
$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3,$$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz.$$

Получим выражение второго дифференциала d^2f для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2f для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

$d^2f =$

Получим выражение второго дифференциала d^2f для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

$d^2f = d(df) =$

Получим выражение второго дифференциала $d^2 f$ для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2f для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2f для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot dy =$$

Дифференциалы высших порядков

$=$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right) dy =$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right) dy =$$

$$= \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| =$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right| =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Задача о полном дифференциале

Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение

$$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции.

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Если в области D выражение w является полным дифференциалом некоторой функции, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)
Если в односвязной области D выполняется условие
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
то выражение w является полным дифференциалом.